

УДК 519.6

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТОК ДЛЯ ДИСКРЕТИЗАЦИИ И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПУЧКОВ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ

Г. Л. Сидельников¹, А. С. Старовойтов¹

В работе рассмотрена технология использования неравномерных сеток для дискретизации и численного решения конечно-разностными методами систем интегро-дифференциальных уравнений при моделировании динамики пучков электронов в плазме. Описана алгоритмическая методика получения неравномерных сеток. Показана эффективность их использования.

Система интегро-дифференциальных уравнений, описывающих динамику пучков электронов в одномерной плазме, в приближении модели независимых частиц имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_L}{d\zeta} &= -\beta_o^2 \alpha \int_{-\infty}^{\tau_L + \zeta} T(\tau'_o) \theta(\tau_L - \tau'_L) \cos(\tau_L - \tau'_L) d\tau'_o, \\ \frac{d\tau_L}{d\zeta} &= \frac{\beta_o}{\beta_L} - 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь β_o, α — постоянные; τ'_o — переменная интегрирования (безразмерное время влета частиц в плазму); ζ — независимая переменная (безразмерная координата); $\gamma_L(\tau_o, \zeta), \tau_L(\tau_o, \zeta)$ — искомые функции (энергия и время частицы с заданными временем влета и координатой в лагранжевой системе отсчета и напряженность электрического поля); $T(\tau_o), \theta(x)$ — известные функции; $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная 1 при $x \geq 0$ и 0 при $x < 0$; $T(\tau_o)$ — функция, описывающая профиль плотности сгустка либо последовательности сгустков с периодом следования 2π . В рамках реализованной нами (в виде компьютерной программы) модели [2] мы можем исследовать случаи

— периодической последовательности сгустков с профилем плотности в виде прямоугольных импульсов (см. рис. 1а)

$$T(\tau_o) = \begin{cases} 1, & 2\pi n \leq \tau_o \leq \tau_* + 2\pi n, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (2)$$

— периодической последовательности сгустков с линейно нарастающим профилем плотности (см. рис. 1б)

$$T(\tau_o) = \begin{cases} \frac{\tau_o - 2\pi n}{\tau_*}, & 2\pi n \leq \tau_o \leq \tau_* + 2\pi n, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (3)$$

— периодической последовательности сгустков с гауссовским профилем плотности и отсечкой незначительных значений плотности, задаваемых коэффициентом eps : (см. рис. 1в)

$$T(\tau_o) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(\tau_o - 2\pi n - \tau_*/2)^2}{(\tau_*/4/\sqrt{\ln(1/eps)})^2}\right), & 2\pi n \leq \tau_o \leq \tau_* + 2\pi n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Здесь τ_* — длительность одного сгустка и $n = 0, 1, \dots, p-1$, где p — количество сгустков.

¹ Белгородский государственный университет, физико-математический факультет, ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород; e-mail: Stalst@yandex.ru, Starovoitov@bsu.edu.ru

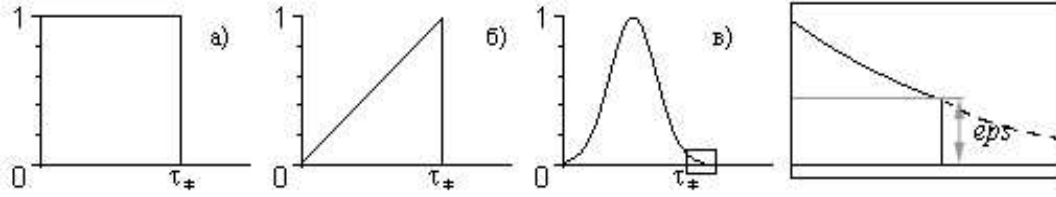


Рис. 1. Формы профилей распределения плотности сгустков

Для численного решения системы (1) в основном используются различные конечно-разностные численные методы, которые для дискретизации искомых функций $\gamma_L(\tau_o, \zeta)$, $\tau_L(\tau_o, \zeta)$ используют равномерные сетки [3]. Мы предлагаем для дискретизации по безразмерному времени влета τ_o использовать неравномерную сетку. Возможность ввода неравномерной сетки по τ_o обусловлена наличием под знаком интеграла функции $T(\tau_o)$, которая принимает значение от 0 до 1 и тем самым определяет интенсивность вклада основной функции $\cos(\tau_L - \tau'_L)$ в значение интеграла. При численном вычислении интеграла большие значения функции $T(\tau_o)$ определяют большие приращения к конечному значению интеграла и, следовательно, требуют более точного вычисления. Добиться этого можно, если использовать сетку с большим шагом в области меньших значений $T(\tau_o)$ и с меньшим шагом — в области больших значений. Такую сетку можно получить, если плотность распределения узлов выбирать из соответствия ее значению функции распределения плотности $T(\tau_o)$ на некотором малом интервале. Это можно сделать следующим образом.

Рассмотрим случай одного сгустка. Вычислим $S = \int_0^{\tau_*} T(\tau) d\tau$ и введем $\bar{S}(x_{k+1}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} T(\tau) d\tau$ так, чтобы выполнялись равенства $\sum_{k=1}^{p_o-1} \bar{S}(x_{k+1}) = S$ и $\bar{S} = S/(p_o - 1)$. Фигурирующие в этих выражениях x_k , $k = 2, 3, \dots, p_o$, и образуют неравномерную сетку. Физический смысл данной сетки таков, что узлы сетки x_k выбираются из соображений соответствия плотности расположения узлов профилю плотности сгустков: если представить, что узлы — это электроны, то их реальная плотность на некотором малом отрезке будет соответствовать плотности, вычисленной при помощи функции, описывающей профиль плотности.

Распространяя проделанные вычисления на последовательность сгустков, получаем сетку

$$\tilde{w}_\tau(m) = \left\{ \tilde{\tau}_{o,(i)} = \tau_{o,(i1-p_o+i2)} = x_{i2} + i1 \cdot 2\pi : \bar{S}(x_{i2}) = \frac{S}{p_o - 1}, \sum_{k=1}^{p_o-1} \bar{S}(x_k) = S \right\}, \quad (5)$$

где $i1 = 0, 1, \dots, p-1$, $i2 = 1, 2, \dots, p_o$, p_o — количество частиц в одном сгустке, p — количество сгустков, $m = p \cdot p_o$ — количество частиц во всех сгустках. Как видно, сетка $\tilde{w}_\tau(m)$ задана неявно. Аналитически вычислить значения узлов сетки достаточно трудно, однако можно использовать простой и достаточно точный алгоритм, позволяющий найти узлы с заданной точностью любым из численных методов вычисления интегралов.

Алгоритм состоит в следующем. Выбираем численный метод вычисления интегралов, например метод левых прямоугольников. Вычисляем интеграл S с заданной точностью ϵ . Затем повторно вычисляем интеграл, фиксируя узлы сетки, в которых $|\bar{S} - S/(p_o - 1)| \leq \epsilon/2$. Эти узлы, количество которых составляет m , и есть узлы неравномерной сетки по безразмерному времени влета τ_o .

Сетку по продольной координате ζ введем равномерную, т.к. функция распределения плотности не зависит от ζ . Таким образом, имеем множество точек $w_\zeta(n) = \{\zeta_j = jh, j = 0, 1, \dots, n, hn = z_{\max}\}$, где z_{\max} — исследуемая протяженность плазмы, n — количество точек дискретизации. Чтобы провести сравнительную характеристику эффективности использования неравномерной сетки, нам понадобится также равномерная сетка по безразмерному времени влета τ_o

$$w_\tau(m) = \{ \tau_{o,(i)} = \tau_{o,(i1-p_o+i2)} = (i2 - 1) \cdot h + i1 \cdot 2\pi, \quad h \cdot (p_o - 1) = \tau_* \}, \quad (6)$$

где $i1 = 0, 1, \dots, p-1$, $i2 = 1, 2, \dots, p_o$, p_o — количество частиц в одном сгустке, p — количество сгустков, τ_* — временная протяженность сгустка, $m = p \cdot p_o$ — количество частиц во всех сгустках.

После дискретизации на равномерных сетках имеем функции $\gamma_L(\tau_{o,(i)}, \zeta_j)$, $\tau_L(\tau_{o,(i)}, \zeta_j)$, а если использовать неравномерные сетки, то получим $\gamma_L(\tilde{\tau}_{o,(i)}, \zeta_j)$, $\tau_L(\tilde{\tau}_{o,(i)}, \zeta_j)$, где $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Исследуем апостериорную асимптотическую оценку глобальной погрешности приближенного решения системы интегро-дифференциальных уравнений (1) по правилу Рунге [4]. Если использовать равномерные сетки (6) $w_\tau(k)$ и $w_\tau(2k)$ либо неравномерные сетки (5) $\tilde{w}_\tau(k)$ и $\tilde{w}_\tau(2k)$, то по правилу Рунге имеем

$$R_i \cong \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_i}{2^s - 1}, \quad (7)$$

где s — порядок аппроксимации метода численного интегрирования, \bar{y}_i — значение интеграла, вычисленное на сетке с количеством узлов k в некоторой точке x_i , \bar{y}_i — значение интеграла, вычисленное на сетке с количеством узлов $2k$ в той же точке, R_i — оценка глобальной погрешности решения. Для неравномерной сетки, где расположения узлов при их увеличении не совпадают, будем использовать крайние точки x_k и x_{2k} .

Теперь проверим эффективность введенной неравномерной сетки по правилу Рунге (7) для профиля плотности, нарастающего по линейному закону (3). При этом для численного вычисления интегралов будем использовать метод левых прямоугольников, а для решения дифференциальных уравнений с начальными условиями $\gamma_L(\tau_{o,(i)}, \zeta_0) = \gamma_o$, $\tau_L(\tau_{o,(i)}, \zeta_0) = \tau_{o,(i)}$, где $i = 1, 2, \dots, m$, — метод Эйлера первого порядка аппроксимации, которые являются наиболее оптимальными по быстродействию [3]. Реализация численных методов решения осуществляется программой Dynamic 1.0 [2].

На рис. 2 представлены зависимости глобальной погрешности вычисления $\gamma_L(\tau_{o,(i)}, \zeta_j)$ и $\gamma_L(\tilde{\tau}_{o,(i)}, \zeta_j)$ от количества точек дискретизации по безразмерному времени влета (количества частиц пучка m) для сеток $\{w_\tau(m), \tilde{w}_\tau(m), m = 12, 24, 50, 100, \dots, 3200\}$ на сетке по продольной координате $w_\zeta(100)$.

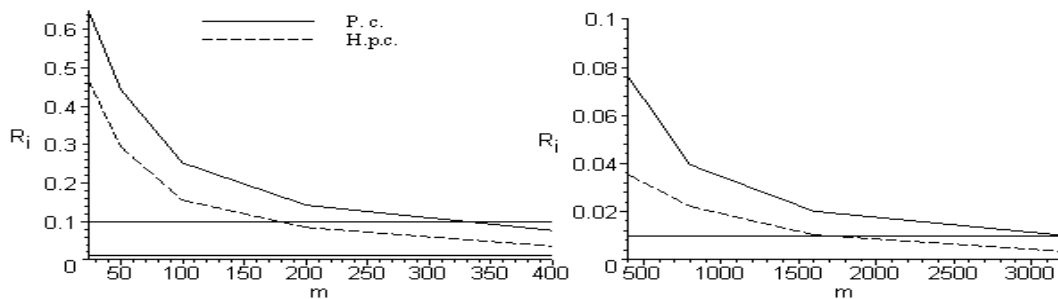


Рис. 2. Зависимость глобальной погрешности R_i для γ_L от количества частиц сгустков m на сетке $w_\zeta(100)$

На рис. 3 представлены зависимости глобальной погрешности вычисления $\tau_L(\tau_{o,(i)}, \zeta_j)$ и $\tau_L(\tilde{\tau}_{o,(i)}, \zeta_j)$ от количества точек дискретизации по безразмерному времени влета (количества частиц пучка m) для сеток $\{w_\tau(m), \tilde{w}_\tau(m), m = 12, 24, 50, 100, \dots, 3200\}$ на сетке по продольной координате $w_\zeta(100)$.

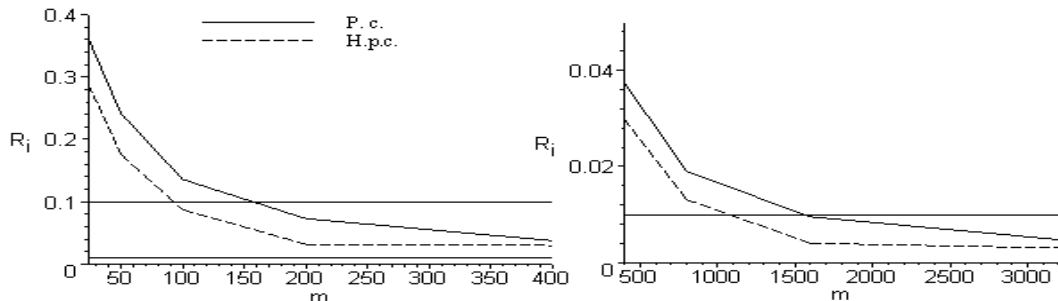


Рис. 3. Зависимость глобальной погрешности R_i для τ_L от количества частиц сгустков m на сетке $w_\zeta(100)$

Из рисунков следует, что сходимость численного метода на неравномерной сетке (5) (сокращенно “Н.р.с.”) осуществляется быстрее по сравнению с равномерной сеткой (6) (сокращенно “Р.с.”). Этот факт является существенным, так как нами рассмотрена достаточно крупная сетка по продольной координате $w_\zeta(100)$. Следовательно, для равных по времени вычислений неравномерная сетка позволяет получать более точный результат либо ускоряет получение результата заданной точности, т.к. оказывается возможным использование сетки с меньшим количеством узлов. При использовании мелких сеток

по продольной координате преимущества неравномерной сетки также очевидны. На рис. 4 и 5 представлены зависимости глобальной погрешности вычисления γ_L и τ_L от количества частиц m для сеток $\{w_\tau(m), \tilde{w}_\tau(m), m = 12, 24, 50, 100, \dots, 3200\}$ на сетке по продольной координате $w_\zeta(500)$.

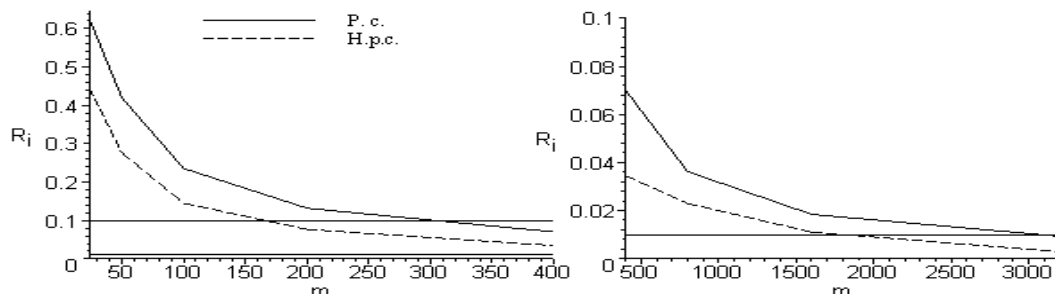


Рис. 4. Зависимость глобальной погрешности R_i для γ_L от количества частиц сгустков m на сетке $w_\zeta(500)$

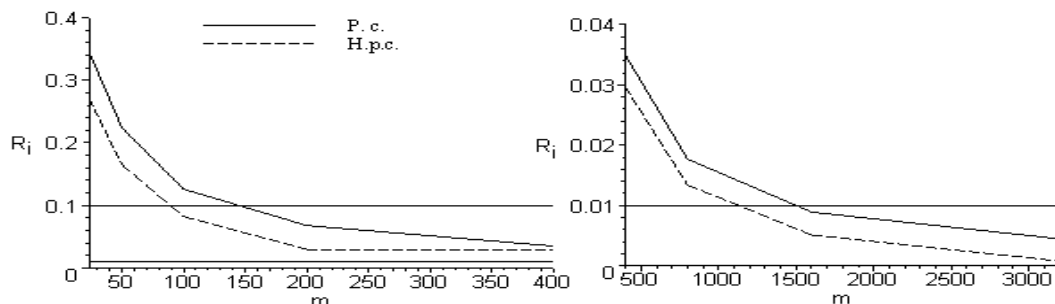


Рис. 5. Зависимость глобальной погрешности R_i для τ_L от количества частиц сгустков m на сетке $w_\zeta(500)$

Проверка эффективности введенной неравномерной сетки по правилу Рунге (7) для гауссовского профиля плотности (4) дает такие же результаты, но они зависят от коэффициента eps и в случае его увеличения эффективность снижается. Для профиля плотности в виде прямоугольного импульса (2) неравномерная сетка соответствует равномерной и об эффективности говорить не приходится. Отметим также, что алгоритм вычисления узлов неравномерной сетки применим для любой формы профиля сгустков, даже непрерывного.

Вывод: использование неравномерных сеток улучшает сходимость численных методов и увеличивает точность вычислений для моделирования динамики сгустков в плазме при использовании неравномерно распределенных по плотности сгустков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Файнберг Я.Б., Балакирев В.А., Онищенко И.Н., Сидельников Г.Л., Сотников Г.В. Возбуждение кильватерных полей в плазме последовательностью сгустков релятивистских электронов // Физика плазмы. 1994. 20, № 7, 8. 674–681.
2. Старовойтов А.С. Моделирование динамики релятивистских электронных пучков в схемах кильватерного ускорения частиц в одномерной плазме (пакет программ) // Свидетельство о регистрации в Отраслевом фонде алгоритмов и программ. М.: ВНИИЦ. 2002. № 50200200588.
3. Сидельников Г.Л., Старовойтов А.С. Исследование численных методов при моделировании динамики пучков электронов в одномерной плазме // Вычислительные методы и программирование. 2003. 4, № 2. 188–193 (<http://www.srcc.msu.su/num-meth/index.html>).
4. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.

Поступила в редакцию
08.09.2003