

УДК 519.633.9

## ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ С ВЭЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИЕЙ В ЗАДАЧЕ ДВУМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

В. В. Пикалов<sup>1</sup>, А. В. Непомнящий<sup>1</sup>

В данной работе рассмотрена модификация итерационного алгоритма на основе ряда Неймана с вэйвлет-фильтрацией на каждом шаге. Вычислительный эксперимент показал, что для мало-ракурсной томографии новый алгоритм позволяет достичь лучшей точности реконструкции в сравнении с алгоритмами Гершберга–Папулиса, максимума энтропии и обратного проецирования с фильтрацией. Данный вывод получен как для гладких, так и для разрывных моделей.

**1. Введение.** При постановке томографических задач в условиях физического эксперимента, в частности в области диагностики плазмы и газодинамических потоков, количество направлений наблюдения невелико. Для работы с малым числом ракурсов особое значение имеют итерационные методы получения приближенных оценок томограмм, использующие последовательное введение в алгоритм априорной физической информации [1, 2]. Из них наиболее известны следующие алгоритмы вычислительной томографии (ВТ): алгоритм Гершберга–Папулиса (Gerchberg–Papoulis, далее — алгоритм GP), основанный на пошаговом исправлении оценки томограммы, а затем ее фурье-спектра [1, 3, 4]; алгоритм максимума энтропии (MENT) [5], использующий разложение искомой двумерной функции в произведение функций, являющихся постоянными вдоль каждого направления наблюдения и переменными лишь в перпендикулярном направлении (ridge-functions [6, 7]). Для реконструкции в качестве начального приближения в данной работе применялся часто используемый в медицинских приложениях метод фильтрации и обратного проецирования (Filtered Back Projection, FBP) [1, 8]. В работе рассматривается модификация итерационного алгоритма, реализующего разложение неизвестного обратного оператора в ряд Неймана по степеням прямого оператора, со сглаживанием на каждой итерации вектора невязки с помощью вэйвлет-фильтрации.

Вэйвлет-преобразование (ВП) [9–11] хорошо зарекомендовало себя как инструмент анализа при применении его в алгоритмах решения томографических задач [12]. Область применения ВП в томографии достаточно широка: кратномасштабный анализ томограмм, позволяющий выделять структуры различных размеров в искомой функции [13, 14]; подавление шумов [15]; выделение структур в локальной постановке задачи [16, 17].

**2. Теория.** Рассмотрим задачу восстановления неизвестной двумерной функции  $g(x, y)$  по набору проекционных данных  $f(\xi_i, p_j)$ , представляющих собой зашумленные интегралы от  $g(x, y)$  вдоль прямых, задаваемых параметрами  $\{\xi_i\}$ ,  $\xi_i \in [0, 180)$ ,  $i = 1, \dots, K$  и  $\{p_j\}$ ,  $p_j \in [-1, 1]$ :  $-x \sin \xi_i + y \cos \xi_i = p_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . В такой постановке — это обратная задача для преобразования Радона  $f = Rg + \eta$ , где  $\eta$  — шумовая составляющая проекционных данных. Число  $N$  называется числом отсчетов на проекции,  $K$  — числом ракурсов. Преимущества того или иного метода решения этой задачи в большой степени определяются спецификой геометрии сбора проекционных данных [18]. В данной работе рассматривается задача малоракурсной томографии, когда число углов наблюдения  $\xi_i$  невелико. Вычислительный эксперимент проводился для различных модельных функций. Для количественной характеристики работы алгоритмов использовалась среднеквадратичная ошибка реконструкции  $\Delta$  (в %):

$$\Delta^2 = \frac{\sum_i \sum_j (g_{ij} - g_{ij}^{\text{exact}})^2}{\sum_i \sum_j (g_{ij}^{\text{exact}})^2},$$

где  $g_{ij}^{\text{exact}}$  и  $g_{ij}$  — значения соответственно точной и восстановленной томограммы на дискретной сетке ( $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$ ). Числа  $N_x$ ,  $N_y$  называются размерностями томограммы. Кратко опишем далее основные известные подходы для малоракурсной параллельной томографии.

<sup>1</sup> Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, г. Новосибирск; e-mail: pickalov@itam.nsc.ru

**2.1. Метод максимума энтропии.** Пусть

$$f_\xi(p) = f(\xi, p) = \int_{-1}^1 g(s, p) ds \tag{1}$$

— проекционные данные вдоль прямых  $p = p_j$  в системе координат  $(s, p)$ , повернутой относительно  $(x, y)$  на угол  $\xi$ . Функционал энтропии выберем в виде [5]

$$\psi(g) = - \iint_D g(x, y) \ln[g(x, y)A] dx dy,$$

где  $A$  — площадь области реконструкции  $D$ . Выбирая максимум  $\psi(g)$  при ограничениях (1) получаем задачу на безусловный экстремум функционала

$$\Psi(g, \Lambda) = \psi(g) - \sum_j \int \Lambda_j(p) \left[ f_j(p) - \int g(s, p) ds \right] dp.$$

Здесь  $\Lambda_j$  — множители Лагранжа. После взятия производной по  $g$  получаем выражение

$$g(x, y) = A^{-1} \prod_j H_j(x \cos \xi_j + y \sin \xi_j), \tag{2}$$

где  $H_j(s) = \exp(\Lambda_j(s) - 1/K)$ . В итоге метод приводит к разложению искомой функции в произведение одномерных по сути функций, которые для каждого направления постоянны вдоль него и переменны только в перпендикулярном направлении. Подставляя далее (2) в (1), находим итерационную схему для коэффициентов  $H_j(s)$ :

$$H_j^{i+1}(s) = \frac{Af_j}{\int ds \prod_{k \neq j} H_k^i(-s \sin \xi_{jk} + p \cos \xi_{jk})}.$$

Здесь  $\xi_{jk} = \xi_k - \xi_j$  — угол между текущим основным  $j$ -м направлением и переменным  $k$ -м. По окончании итераций томограмма восстанавливается по формуле (2). Численные исследования описанного метода для задач малоракурсной томографии плазмы были выполнены в работе [19]. В качестве регуляризующей части алгоритма применялись сглаживающие сплайны и медианная фильтрация, что значительно улучшило устойчивость алгоритма. При трех-четырёх ракурсах наблюдения на гладких моделях была достигнута высокая точность восстановления. Для разрывных же функций результаты восстановления сравнимы по точности реконструкции с другими алгоритмами двумерной ВТ.

**2.2. Метод Гершберга–Папулиса.** Метод основан на применении теоремы о центральном сечении и фурье-синтезе с последующей интерполяцией двумерного спектра [20, 21]. В итерациях используются следующие свойства оператора преобразования Радона:

- 1) по теореме о центральном сечении фурье-образ проекции  $F(\xi, \nu_p)$  равен центральному сечению фурье-образа томограммы  $G(\nu_x, \nu_y)$  вдоль прямой  $-\nu_x \sin \xi + \nu_y \cos \xi = 0$ ;
- 2)  $F(\xi, 0)$  постоянна для всех  $\xi$ .

Кроме этих свойств в итерационный процесс вводится информация: о геометрии области реконструкции, о положительности восстановленных значений томограммы, о сохранении энергии в каждом направлении, о гладкости искомого решения и об оценке уровня экспериментального шума.

Итерационные шаги регуляризованного алгоритма ГР выглядят следующим образом.

1) По известному набору проекций с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) получается набор их одномерных фурье-образов. По теореме о центральном сечении эти величины дают в полярной системе координат в фурье-пространстве томограммы значения  $G(\xi + \pi/2, \nu)$  на  $K$  лучах. Значения спектральных амплитуд зануляются вне указанных лучей.

2) Выполняется обратное двумерное БПФ для получения оценки томограммы  $g^i(x, y)$ .

3) В получившуюся оценку вносится априорная информация о положительности решения и его пространственной ограниченности.

4) Выполняется прямое двумерное БПФ от оценки томограммы  $g^i(x, y)$  после шага 3. Значения спектра на лучах, определенных на шаге 1, заменяются на значения, определенные там же непосредственно

по имеющимся проекциям. Вносится также априорная информация о спектре объекта, проводится его сглаживание, согласование с уровнем шума в измерениях.

5) Проверяются критерии окончания итерационного процесса. Если они не выполняются, то осуществляется переход на шаг 2.

Регуляризованная версия алгоритма GP для задач малоракурсной томографии была разработана в [22], там же приведены исследования его свойств для трех ракурсов. Обобщение этого алгоритма на задачу трехмерной томографии (с измерением проекций на лучах — P-преобразование [18]) выполнено в работе [23].

**2.3. Метод фильтрации и обратного проецирования.** Метод реализует сверточное представление внутреннего интеграла в аналитической формуле инверсии преобразования Радона [1]

$$g(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\xi \int_{-1}^1 f(\xi, p) \psi(p - p_0) dp,$$

где  $p_0 = -x \sin \xi + y \cos \xi$  и  $\psi(p)$  — фильтр. В данной работе был использован фильтр Шеппа-Логана [8]:

$$\psi(kh_p) = \frac{4}{h_p^2(4k^2 - 1)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $h_p$  — шаг по прицельному параметру  $p$ .

**2.4. Дискретное вэйвлет-преобразование и КМА в  $L^2(R)$ .** Кратномасштабный анализ (КМА) в  $L^2(R)$  определяется следующими свойствами [12].

(1) Существует последовательность замкнутых подпространств  $V_j$ ,  $j \in Z$ , такая, что:

$$а) \{0\} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(R);$$

$$б) \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j} = L^2(R);$$

$$в) f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}.$$

(2) Существует функция  $\phi$ , такая, что  $\{\phi(x - k)\}_{k \in Z}$  формирует ортонормированный базис в  $V_0$ .

КМА описывает последовательность вложенных аппроксимационных пространств  $V_j$  в  $L^2(R)$ , таких, что замыканием их объединения является само пространство  $L^2(R)$ . Проекции произвольной функции  $P_{V_j} f$  из  $L^2(R)$  на  $V_j$  есть аппроксимации, которые сходятся к  $f$  при  $j \rightarrow \infty$ . Далее, пространство  $V_0$  обладает ортонормированным базисом, состоящим из трансляций одной функции  $\phi$ . Эти пространства связаны тем требованием, что элемент  $f$  пространства  $V_j$  при масштабировании на 2 становится элементом пространства  $V_{j+1}$ . Функция  $\phi$  называется *масштабирующей функцией*. Множество  $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), k \in Z\}$  образует ортонормированный базис в  $V_j$ . Масштабирующая функция  $\phi$  удовлетворяет уравнению для сдвигов, т.е. существует последовательность  $\{h_k\}_{k \in Z}$  действительных чисел, такая, что:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} h_k \phi(2x - k).$$

Пространство  $W_j$  определяется как ортогональное дополнение к  $V_j$  в  $V_{j+1}$ , т.е.  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  и  $W_j \perp V_j$ . Имеет место следующее свойство:

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = L^2(R).$$

Существует такая функция  $\psi$ , называемая *вэйвлетом, ассоциированным с данным КМА*, что множество  $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), k \in Z\}$  образует ортонормированный базис в пространстве  $W_j$ , причем

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} g_k \phi(2x - k), \quad g_k = (-1)^k h_{1-k},$$

где  $\{h_k\}$  — коэффициенты из уравнения для сдвигов.

Множества  $\{h_k\}$  (коэффициенты фильтрации для масштабирующей функции) и  $\{g_k\}$  (коэффициенты фильтрации для вэйвлетов) позволяют численно находить значения  $\phi$  и  $\psi$ , а также коэффициенты *дискретного вэйвлет-преобразования*  $\{d_j\}$  в разложениях для каждого  $j$ :

$$P_{V_j} f(x) = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(x) = \sum_k c_{j-1,k} \phi_{j-1,k}(x) + \sum_k d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x).$$

Дискретное вэйвлет-преобразование [24, 25] — это отображение  $W$ , переводящее последовательности коэффициентов  $\{c_{j,k}\}$  в последовательности  $\{c_{j-1,k}, d_{j-1,k}\}$  для  $j = J, J - 1, 0$ . В нашем случае размерность вектора проекционных данных равна  $N = 128 = 2^7$  (на рис. 1 приведен пример одной из проекций для описанной ниже разрывной модели без шума); таким образом, мы имеем  $J = 7$  масштабов разложения. Это проиллюстрировано на рис. 2, где изображен результат быстрого вэйвлет-преобразования. Показано семь уровней вэйвлет-коэффициентов для той же проекции, представляющих собой одномерный массив размерности  $N$ . Уровень 7 состоит из  $N/2$  коэффициентов (номера точек 65–128), уровень 6 из  $N/4$  (номера точек 33–64) и т.д.

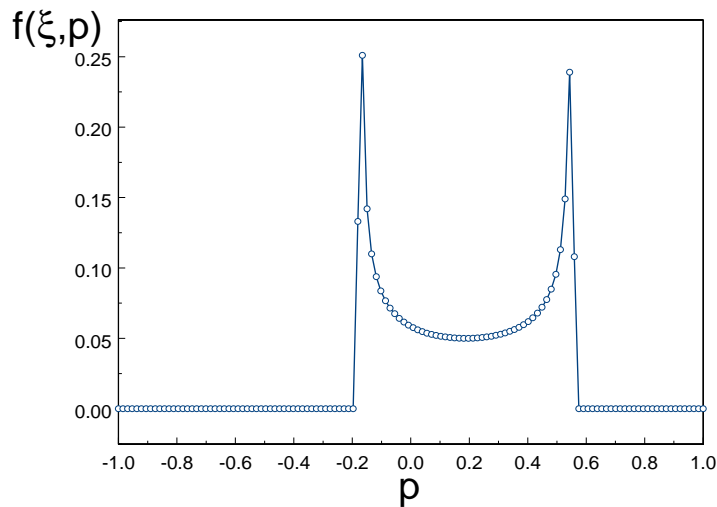


Рис. 1. Проекция на фиксированном направлении  $\xi = 60^\circ$

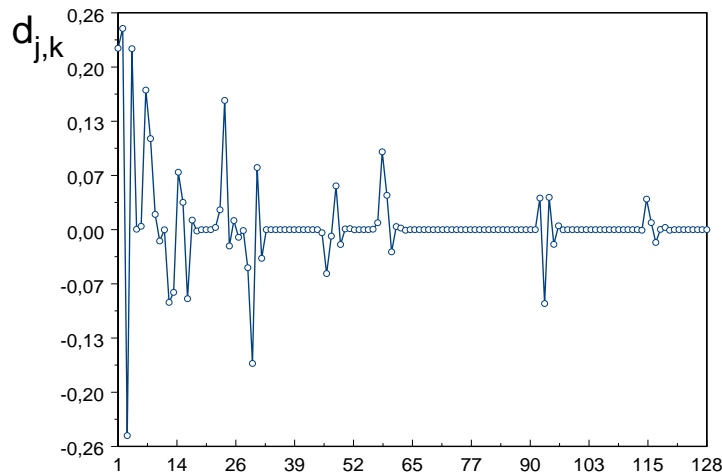


Рис. 2. Коэффициенты вэйвлетов Добеши 12-го порядка для этой же проекции

**2.5. Метод разложения оператора  $R^{-1}$  в ряд Неймана с применением вэйвлет-фильтрации.** Предлагаемый алгоритм реконструкции (Neumann Decomposition with Wavelet Filtering, NDWF) записывается в следующем виде:

$$g^0 = R_0^{-1} L^0 f, \quad g^{i+1} = g^i + \lambda^i R_0^{-1} L^i r^i,$$

где  $R_0^{-1}$  — приближение оператора обратного преобразования Радона  $R^{-1}$  (здесь в качестве  $R_0^{-1}$  был

использован оператор фильтрации и обратного проецирования);  $r^i = f - Rg^i$  — вектор невязки проекционных данных на  $i$ -й итерации;  $\lambda^i$  — параметр релаксации;  $L^i = W^{-1}\gamma^i W$  — оператор вэйвлет-фильтрации на  $i$ -й итерации,  $\gamma^i$  — фильтр на  $i$ -й итерации;  $g^i$  — приближенное решение на  $i$ -й итерации. На каждом шаге итерационного процесса оператор  $L^i$  действует на вектор невязки. Это означает, что влияние на решение высокочастотных составляющих (той или иной природы, например, шумов измерений или артефактов реконструкции) в проекционных данных будет зависеть от выбора оператора вэйвлет-фильтрации. Оператор  $L^i$  осуществляет прямое и обратное дискретное ВП, подвергая фильтрации вэйвлет-коэффициенты. Для осуществления дискретного ВП был выбран вэйвлет Добеши порядка 12 и использовался алгоритм быстрого ВП [25].

Выпишем следующие шаги нового итерационного алгоритма NDWF.

1) Начальное приближение  $g^0(x, y)$  получается после применения к проекционным данным вэйвлет-фильтрации и оператора FBP.

2) Для текущей оценки томограммы решается прямая задача, вычисляется вектор невязки проекционных данных  $r^i$ , который подвергается вэйвлет-фильтрации и действию оператора FBP.

3) Новая оценка томограммы  $g^i(x, y)$  получается добавлением к предыдущей оценке результата выполнения шага 2 с весом  $\lambda^i$ . Параметр релаксации  $\lambda^i$  подбирался из условий сохранения сходимости итераций и достаточно быстрого уменьшения нормы невязки на первых итерациях.

4) Проверяются критерии окончания итерационного процесса. Если они не выполняются, то осуществляется переход на шаг 2. В качестве правила останова итераций может быть выбрана та итерация, после которой начинается рост нормы невязки. Вторым возможным критерием останова — равенство нормы невязки норме шума в сигнале.

Конструирование мультипликативного вэйвлет-фильтра  $\gamma$  напрямую связано с количеством масштабов в вэйвлет-разложении. Количество масштабов  $\log_2 N$  определяет число  $J$  дискретных значений фильтра. Оператор  $L$  действует следующим образом: вэйвлет-коэффициенты каждого уровня  $j$  умножаются на соответствующее этому уровню значение фильтра  $\gamma$ . Выбор  $\gamma$  оказывает непосредственное влияние на ход итерационного процесса, а также на результат реконструкции. По аналогии со стандартными методами фильтрации в пространстве Фурье, а также известными видами вэйвлет-фильтрации, такими как жесткая и мягкая фильтрация (hard and soft thresholding) [15, 26], были использованы не зависящие от номера итерации косинусный и ступенчатый фильтры (рис. 3, кривые 1 и 2 соответственно), охватывающие весь диапазон масштабов разложения. Частный случай, когда  $\gamma$  тождественно равна единице, соответствует отключению вэйвлет-фильтрации и дает простое разложение в ряд Неймана. В численном эксперименте было замечено, что при отсутствии шума в проекциях такой фильтр может дать несколько лучшие результаты, чем другие фильтры. Однако для зашумленных проекций вэйвлет-фильтрация дает более точную реконструкцию и ее обязательно следует включать.

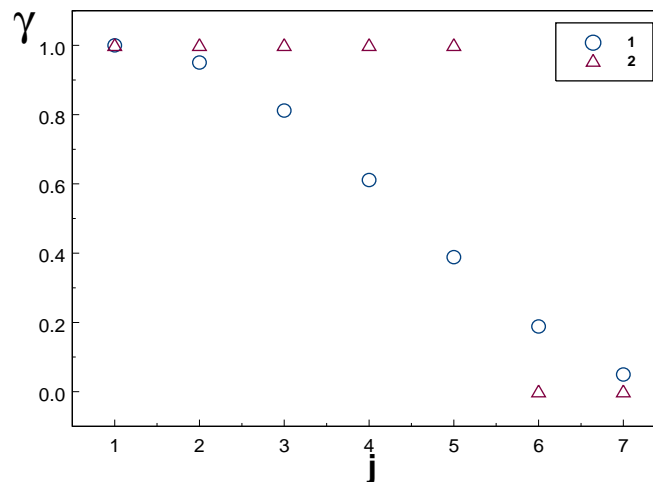


Рис. 3. Косинусный (1) и ступенчатый (2) вэйвлет-фильтры

**3. Вычислительный эксперимент.** Для численного эксперимента были выбраны две модельные

функции, изображенные на рис. 4. Первая (гладкая) модель представлена повернутой относительно оси  $x$  на  $45^\circ$  эллиптической гауссианой

$$g(x, y) = A \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \right) \right]$$

с параметрами: амплитудой  $A = 0.5$ , центральной точкой  $x_0 = 0, y_0 = 0$  и полными полуширинами  $a = 0.85, b = 0.45$ . Вторая (разрывная) модель представляет собой разность характеристических функций кругов радиуса  $r_1 = 0.75, r_2 = 0.7$  с общим центром  $x_0 = -0.2, y_0 = 0$ . В проекционные данные добавлялся случайный гауссовский шум двух типов — с дисперсией, пропорциональной сигналу  $\sigma_j = \sigma f(\xi, p_j)$ , и с равномерной дисперсией  $\sigma_j = \sigma \max f(\xi, p_j)$ , где  $\sigma_j$  — вектор дисперсии,  $\sigma$  — уровень шума,  $f(\xi, p_j)$  — проекция в направлении  $\xi, j = 1, \dots, N$ .

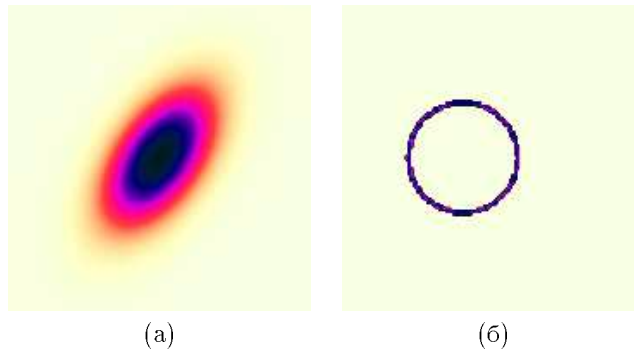


Рис. 4. Модельные функции: а) гладкая, б) разрывная

Томограмма восстанавливалась четырьмя описанными методами при следующих параметрах:  $N_x = 128, N_y = 128, N = 128$ , количество ракурсов  $K$  варьировалось от 3 до 7.

**3.1. Гладкая модель.** Результаты сравнения погрешностей томографической реконструкции модели № 1 по четырем алгоритмам приведены в табл. 1. Уровень экспериментального шума в проекциях изменялся от 0 до 10 процентов. Тип шума выбирался с дисперсией, пропорциональной уровню сигнала. В табл. 2 такие же вычисления приведены для второго типа шума — с одинаковой дисперсией (далее — равномерной), но своей на каждом ракурсе наблюдения. Из этих таблиц видно, что увеличение числа ракурсов с 3 до 7 для алгоритма MENT практически не влияет на ошибку реконструкции, тогда как для NDWF, например, это влияние существенно: с добавлением двух ракурсов ошибка при пропорциональном шуме снижается в два раза.

Таблица 1

Ошибка реконструкции гладкой модели (№ 1) для различных алгоритмов, количества ракурсов и уровня шума (пропорциональная дисперсия)

Метод	MENT			GP			NDWF			FBP		
	K			K			K			K		
$\sigma$ (%)	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7
0	1	2	2	14	6	3	35	13	5	40	13	4
3	3	5	3	14	5	5	35	14	5	40	14	6
5	4	7	4	14	6	7	35	15	5	40	15	7
10	7	9	7	14	7	12	33	16	7	44	22	14

Сравнивая томограммы на рис. 5, можно утверждать, что гладкое решение получено только для GP и NDWF. Хотя среднеквадратичная ошибка реконструкции равна 7% также и для MENT, этот алгоритм, несмотря на включение процедуры сглаживания регуляризирующими сплайнами, дает здесь недостаточно гладкое решение. На рис. 6 показана зависимость ошибки реконструкции  $\Delta(i)$  от номера итерации для

Таблица 2

Ошибка реконструкции модели № 1 (равномерная дисперсия)

Метод $\sigma$ (%)	MENT			GP			NDWF			FBP		
	К			К			К			К		
	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7
3	8	10	10	39	29	38	33	13	8	54	30	26
5	13	16	16	54	37	49	33	17	13	65	35	35
10	24	29	29	75	61	75	38	25	26	69	45	44

трех из описанных методов: MENT, GP и NDWF. Все методы обладают достаточно быстрой сходимостью. Начальное приближение лучше у NDWF-реконструкции, хотя при росте числа итераций ошибка MENT-реконструкции становится близкой к ошибке метода NDWF.

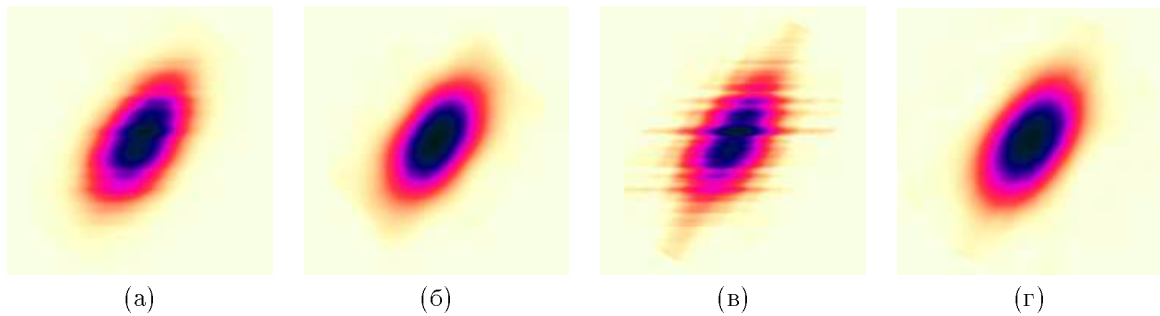


Рис. 5. Реконструкции модели № 1 по зашумленным проекциям ( $K=6$ ). Уровень шума в проекциях  $\sigma = 10\%$  (с пропорциональной дисперсией) а) MENT, 50 итераций,  $\Delta = 7\%$ , б) GP, 50 итераций,  $\Delta = 10\%$ , в) FBP,  $\Delta = 16\%$ , г) NDWF, 50 итераций,  $\lambda = 0.001$ ,  $\Delta = 7\%$

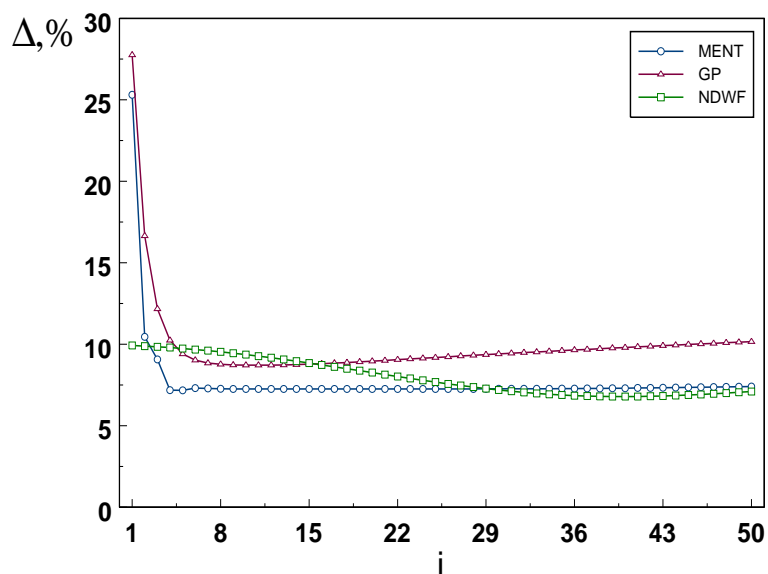


Рис. 6. Зависимость ошибки реконструкции модели № 1 от номера итерации по 6 проекциям без шума для MENT, GP, NDWF ( $\lambda = 0.001$ )

**3.2. Разрывная модель.** В табл. 3 и 4 представлены результаты реконструкции модели № 2. При пропорциональном шуме (табл. 3) качество реконструкции разрывной модели методом NDWF стано-

вится хуже с уменьшением числа ракурсов по сравнению с алгоритмами MENT и GP. При равномерном шуме (табл. 4) наблюдается качественное улучшение восстановленной методом NDWF томограммы по сравнению с другими методами. На рис. 7 мы видим, что толщина кольца лучше восстановлена методом NDWF, а артефакты реконструкции NDWF имеют меньшую амплитуду, чем в MENT-реконструкции.

Таблица 3

Ошибка реконструкции разрывной модели (№ 2) (пропорциональная дисперсия)

Метод $\sigma$ (%)	MENT			GP			NDWF			FBP		
	К			К			К			К		
	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7
0	63	49	43	80	64	41	84	70	50	150	78	51
3	64	49	43	80	64	42	84	71	50	140	75	51
5	65	49	43	80	64	42	84	71	51	134	74	51
10	69	50	47	81	65	44	86	75	53	123	73	53

Таблица 4

Ошибка реконструкции модели № 2 (равномерная дисперсия)

Метод $\sigma$ (%)	MENT			GP			NDWF			FBP		
	К			К			К			К		
	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7
3	75	60	54	82	63	46	93	81	76	225	168	138
5	80	66	62	86	74	62	94	82	77	183	143	121
10	86	77	79	93	91	85	94	85	82	114	101	95

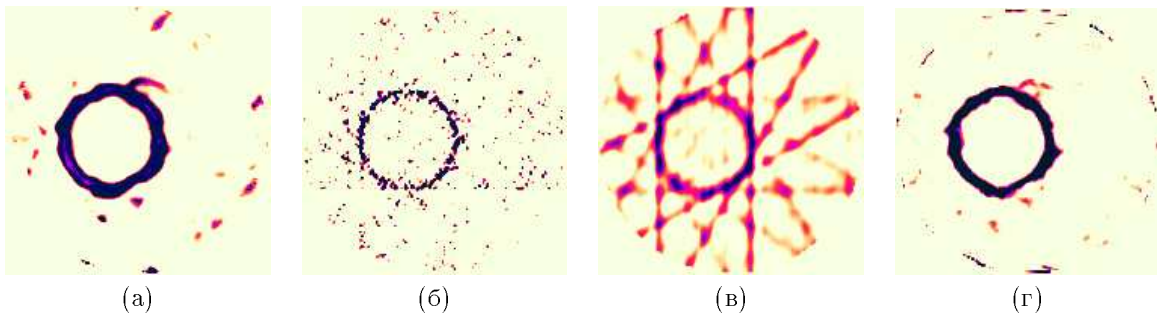


Рис. 7. Реконструкции модели № 2 по зашумленным проекциям (K=6). Уровень шума в проекциях  $\sigma = 10\%$  (равномерная дисперсия) а) MENT, 100 итераций,  $\Delta = 81\%$ , б) GP, 50 итераций,  $\Delta = 92\%$ , в) FBP,  $\Delta = 97\%$  г) NDWF, 100 итераций,  $\lambda = 0.002$ ,  $\Delta = 83\%$

На рис. 8 показана зависимость  $\Delta(i)$  для проекций без добавления шума. В данном случае ошибка алгоритма NDWF больше ошибки MENT, но меньше ошибки GP.

Сравнение среднеквадратичной ошибки реконструкции для двух используемых фильтров и для обеих моделей приведено на рис. 9. Видно, что для гладкой модели ступенчатый фильтр является предпочтительным всюду, а для разрывной он дает лучшие результаты на первом десятке итераций, а дальше его стоит переключать на косинусный.

**4. Заключение.** Численные расчеты показали, что при определенном выборе вэйвлет-фильтра (т.е. оператора  $L$ ) и параметра  $\lambda$  предложенный итерационный алгоритм томографической реконструкции сходится и в ряде случаев наблюдается повышение точности восстановления как гладких, так и разрывных фантомов по сравнению с альтернативными подходами MENT, GP и FBP. В процессе фильтрации



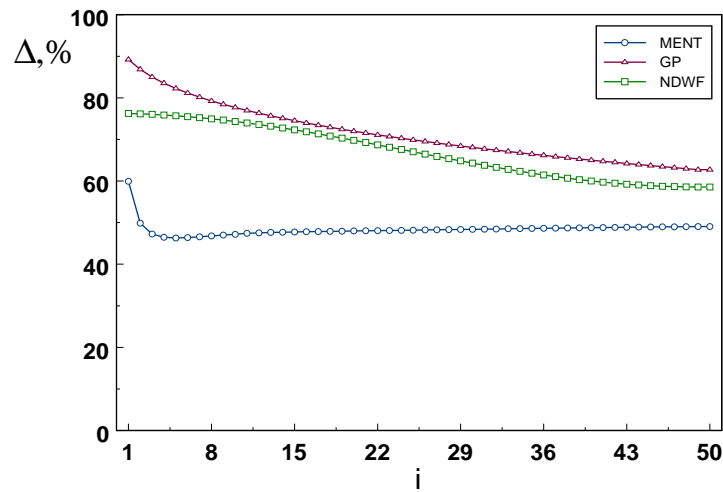


Рис. 8. Зависимость ошибки реконструкции разрывной модели от номера итерации по 6 проекциям без шума для MENT, GP, NDWF ( $\lambda = 0.003$ )

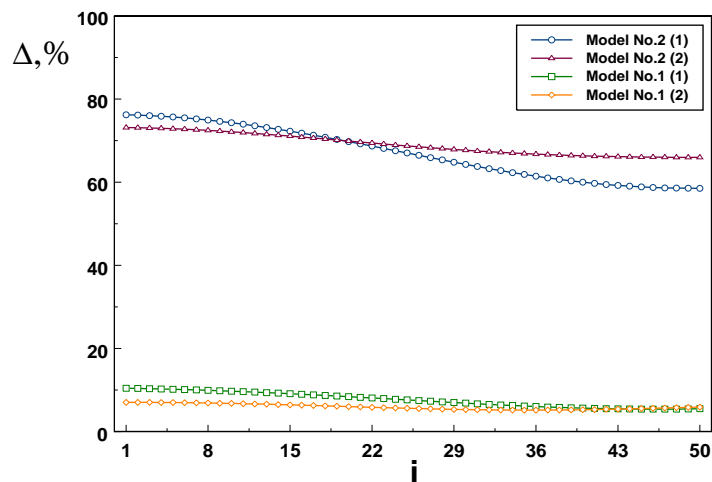


Рис. 9. Зависимость ошибки реконструкции от номера итерации для двух моделей при использовании косинусного (1) и ступенчатого (2) вэйвлет-фильтров (6 ракурсов)

вектора невязки рекомендуется вместо отбрасывания высокочастотных компонент (на масштабах с большим номером) осуществлять их умножение на косинусный фильтр, аргументом которого является номер масштаба.

Данная работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 01-01-00776 и 02-01-00515).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пикалов В.В., Мельникова Т.С. Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995.
2. Лихачев А.В., Пикалов В.В. Новый метод определения неизвестного аддитивного фона в проекционных данных в задаче трехмерной томографии // ЖВМ и МФ. 2002. 42, № 3. 85–97.
3. Kak A.C., Slaney M. Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988.
4. Вишняков Г.Н., Гильман Г.А., Левин Г.Г. Восстановление томограмм при ограниченном числе проекций. Итерационные методы // Опт. спектр. 1985. 58, № 2. 406–413.

5. *Minerbo G.* MENT: a maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection data // *Comput. Graph. Image Processing.* 1979. **10**, N 1. 46–48.
6. *Logan B.F., Shepp L.A.* Optimal reconstruction of a function from its projections // *Duke Math. J.* 1975. **42**. 645–659.
7. *Kazantsev I.G.* Tomographic reconstruction from arbitrary directions using ridge functions // *Inverse Problems.* 1998. **14**, N 3. 635–645.
8. *Shepp L.A., Logan B.F.* The Fourier reconstruction of a head section // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1974. **21**, N 3. 21–43.
9. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *УФН.* 1996. **166**, № 11. 1145–1170.
10. *Переберин А.В.* О систематизации вейвлет-преобразований // *Вычислительные методы и программирование.* 2001. **2**, № 2. 133–158.
11. *Васильева Л.Г., Жилейкин Я.М., Осипук Ю.И.* Преобразования Фурье и вэйвлет-преобразования. Их свойства и применение // *Вычислительные методы и программирование.* 2002. **3**, № 2. 79–82.
12. *Aldroubi A., Unser M.* (Eds.) *Wavelets in medicine and biology.* Boca Raton: CRC Press, 1996.
13. *Пикалов В.В., Непомнящий А.В.* Сравнительный анализ алгоритмов локальной томографии и разномасштабных вэйвлет-анализаторов // *Обратные и некорректно поставленные задачи. Москва, МГУ, 20–21 июня 2000 (Тезисы докладов).* М.: МАКС Пресс, 2000. 60.
14. *Пикалов В.В., Непомнящий А.В.* Вэйвлет-анализ проекционных данных для выявления разномасштабных структур на двумерных томограммах // *Оптические методы исследования потоков. Москва, 27–29 июня 2001 (Тезисы докладов).* М.: МЭИ, 2001. 248–251.
15. *Donoho D.L.* De-noising by soft-thresholding // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1995. **41**, N 3. 613–627.
16. *Pickalov V.V., Nepomnyashchiy A.V.* Wavelet transform based iterative algorithm for 2D tomography reconstruction // *Intern. Conf. Ill-Posed and Inverse Problems. August 5–9, 2002. Novosibirsk: Sobolev Inst. Press, 2002.* 128.
17. *Bhatia M., Karl W.C., Willsky A.S.* A wavelet-based method for multiscale tomographic reconstruction // *IEEE Trans. Med. Imag.* 1996. **15**, N 1. 92–101.
18. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М: Мир, 1990.
19. *Денисова В.И., Пикалов В.В., Баландин А.Л.* Модифицированный метод максимума энтропии в томографии плазмы // *Оптика и спектроскопия.* 1996. **81**, № 1. 43–48.
20. *Gerchberg G.* Super-resolution through error energy reduction // *Opt. Acta.* 1974. **21**, N 9. 709–720.
21. *Papoulis A.* A new algorithm in spectral analysis and band limited extrapolation // *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1975. **CAS-22**, N 9. 735–742.
22. *Melnikova T.S., Pickalov V.V.* Computer-aided plasma tomography // *High Temperature Dust-Laden Jets in Plasma Technology. Proc. Intern. Workshop. 6–8 Sept. 1988, Novosibirsk, USSR. Utrecht: VSP, 1990.* 257–282.
23. *Лухачев А.В., Пикалов В.В.* Синтезированный алгоритм трехмерной томографии // *Математическое моделирование.* 1998. **10**, № 1. 73–85.
24. *Louis A.K., Maaß P., Rieder A.* *Wavelets: theory and applications.* New York: Wiley, 1997.
25. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* *Numerical recipes in Fortran.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
26. *Kalifa J., Laine A., Esser P.D.* Regularization in tomographic reconstruction using thresholding estimators // *IEEE Trans. Med. Imag.* 2003. **22**, N 3. 351–359.

Поступила в редакцию  
18.07.2003

---