

УДК 517.988.68

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ И АТТРАКТОРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Ю. Кокурин¹

Строится и исследуется класс методов аппроксимации решений нелинейных уравнений с приближенно заданным гладким оператором в гильбертовом пространстве при отсутствии свойства регулярности у производной оператора. Искомое решение аппроксимируется траекторией нелинейной динамической системы, связанной с рассматриваемым уравнением. Конструкция этой системы определяется линеаризацией исходного уравнения по схеме Гаусса–Ньютона и различными способами ее регуляризации. При выполнении ряда условий установлено существование шара, притягивающего соответствующую область фазового пространства, а также наличие у системы минимального аттрактора, располагающегося в малой окрестности искомого решения.

1. Постановка задачи. Объектом исследования в работе являются методы аппроксимации решения уравнения

$$F(x) = 0, \quad x \in H_1, \tag{1.1}$$

где $F : H_1 \rightarrow H_2$ — нелинейный оператор, действующий в паре гильбертовых пространств (H_1, H_2) . Обозначим через x^* интересующее нас решение уравнения (1.1) и положим $\Omega_R(x) = \{z \in H_1 : \|z - x\| < R\}$. Предполагается, что оператор $F(x)$ дифференцируем по Фреше, а производная $F'(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega_R(x^*). \tag{1.2}$$

Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ используется для единообразного обозначения норм соответствующих пространств. От операторов $F'(x)$, $F'^*(x)F'(x)$ не требуется ограниченная обратимость (регулярность) в окрестности решения x^* , поэтому исходная задача (1.1) является в общем случае некорректной и устойчивая аппроксимация ее решения в условиях погрешностей в задании $F(x)$ требует привлечения методов регуляризации (см., например, [1–3]). Будем предполагать, что вместо точного оператора $F(x)$ в (1.1) доступно лишь его приближение $\tilde{F} : H_1 \rightarrow H_2$, дифференцируемое по Фреше и удовлетворяющее неравенству (1.2) с той же константой L и условиям

$$\|\tilde{F}(x^*)\| \leq \delta; \quad \|\tilde{F}'(x) - F'(x)\| \leq \delta \quad \forall x \in \Omega_R(x^*), \tag{1.3}$$

где $\delta \in [0, \delta_0]$.

Плодотворный и широко используемый подход к построению методов аппроксимации решения x^* уравнения (1.1) заключается в конструировании по данному оператору $F(x)$ дискретной либо непрерывной динамической системы, для которой x^* была бы точкой притяжения. В непрерывном случае для реализации этой идеи требуется построить систему

$$\dot{x} = \Phi(x), \quad x = x(t), \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

по отношению к которой x^* была бы асимптотически устойчивой точкой покоя, т.е.

$$\Phi(x^*) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

по крайней мере для начальных условий $x(0) = x_0$ из фиксированной окрестности x^* . В регулярном случае, когда оператор $F'(x)$ (либо $F'^*(x)F'(x)$) непрерывно обратим, в качестве (1.4) могут выступать, например, системы

$$\dot{x} = -(F'(x))^{-1}F(x), \quad \dot{x} = -(F'^*(x)F'(x))^{-1}F'^*(x)F(x), \tag{1.5}$$

¹ Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пр. Ленина, 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kokurin@marsu.ru

являющиеся непрерывными аналогами классических итерационных методов Ньютона–Канторовича и Гаусса–Ньютона (см., например, [4]). В нерегулярной ситуации схемы вида (1.5) не являются в общем случае реализуемыми и тем более не порождают траектории $x = x(t)$, аппроксимирующие x^* в каком-либо разумном смысле даже при отсутствии погрешностей в задании $F(x)$. Моделью динамических систем, пригодных в этом случае, могут служить предложенные в [5] итерационные процессы $x_0 \in \Omega_R(x^*)$,

$$x_{n+1} = \xi - \Theta(\tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}'(x_n), \alpha)\tilde{F}'^*(x_n)(\tilde{F}(x_n) - \tilde{F}'(x_n)(x_n - \xi)), \quad (1.6)$$

где $\Theta(\lambda, \alpha)$ — порождающая функция, $\xi \in H_1$ — управляющий параметр, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. К процессу (1.6) приходим, записав линеаризацию приближенно заданного уравнения (1.1) по методу Гаусса–Ньютона

$$\tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}'(x_n)(x - x_n) + \tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}(x_n) = 0, \quad x \in H_1, \quad (1.7)$$

и применив к некорректному в общем случае уравнению (1.7) схему [6, с. 28] аппроксимации его ξ — нормального решения.

Сходимость процессов (1.6) исследовалась при выполнении следующего условия, имеющего смысл приближенной истокопредставимости начальной невязки $x^* - \xi$.

Условие А. Имеет место представление

$$x^* - \xi = (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v + w; \quad v, w \in H_1, \quad (1.8)$$

где $p \geq 1/2$, $\|w\| \leq \Delta$.

Величина Δ в условии А имеет смысл погрешности классического истокообразного представления $x^* - \xi \in R((F'^*(x^*)F'(x^*))^p)$, где $R(A)$ есть образ оператора A . Как показано в [5], для определяемых в соответствии с (1.6) приближений $\{x_n\}$ справедливо предельное соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| \leq \frac{C_0}{\sqrt{\alpha}} (\delta + \Delta + \|v\| \alpha^p). \quad (1.9)$$

Согласно (1.9), итерации x_n стабилизируются при $n \rightarrow \infty$ в окрестности решения x^* с радиусом, пропорциональным погрешностям δ, Δ .

В настоящей работе изучается непрерывный аналог процесса (1.6), определяемый операторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \xi - \Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha)\tilde{F}'^*(x)(\tilde{F}(x) - \tilde{F}'(x)(x - \xi)) - x, \quad x(0) = x_0 \in \Omega_R(x^*). \quad (1.10)$$

Здесь, как и в (1.6), x_0 — начальное приближение к x^* , $\alpha > 0$. Под решением задачи Коши (1.10) понимается H_1 -значная функция $x = x(t)$, определенная на некотором отрезке $[0, \tilde{T}]$ ($\tilde{T} > 0$), сильно непрерывно дифференцируемая на нем, обращающая дифференциальное уравнение (1.10) в тождество при $t \in [0, \tilde{T}]$ и удовлетворяющая начальному условию из (1.10).

Согласно (1.2), $\|F'(x)\|, \|\tilde{F}'(x)\| \leq N \quad \forall x \in \Omega_R(x^*)$, где $N = \|F'(x^*)\| + LR + \delta_0$. Всюду в дальнейшем считаем, что функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ при каждом $\alpha \in (0, \alpha_0]$ аналитична по λ в открытой области $D_\alpha \subset \mathbf{C}$, содержащей отрезок $[0, N^2]$ вещественной оси. Требование аналитичности $\Theta(\lambda, \alpha)$ не должно вести к существенному ограничению общности построений, поскольку большинство порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$, используемых в дискретных аналогах (1.6) процесса (1.10), ему удовлетворяет (см. [3]). Помимо этого считаем выполненными следующие основные условия [3, с. 102].

Условие В. Для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$ справедливо неравенство

$$\sup_{\lambda \in [0, N^2]} |\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}| \leq \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}}. \quad (1.11)$$

Условие С. Для некоторого $p_0 \geq 1/2$ (где, возможно, $p_0 = \infty$) при всех $p \in [0, p_0]$ ($p \in [0, \infty)$ в случае $p_0 = \infty$) выполняется соотношение

$$\sup_{\lambda \in [0, N^2]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \lambda^p \leq C_2 \alpha^p \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \quad (1.12)$$

где $C_2 = C_2(p)$.

Здесь и далее через C_1, C_2, \dots обозначаются положительные абсолютные константы, зависящие, вообще говоря, от L, N , но не зависящие от α, δ, Δ .

Целью работы является исследование асимптотических свойств траекторий $x(t)$ динамической системы (1.10). При условии достаточной близости начального приближения x_0 к x^* будет установлено аналогичное (1.9) соотношение

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| < C_3 \left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \|v\| \alpha^p + \|v\| \delta + \Delta \right). \tag{1.13}$$

Неравенство (1.13) означает, что шар с центром в x^* является притягивающим множеством для точек x_0 , лежащих в некоторой окрестности x^* . При наложении на оператор $\tilde{F}(x)$ подходящих условий компактности устанавливается наличие у системы (1.10) связного, компактного и инвариантного минимального аттрактора, который естественно рассматривать в качестве аппроксимирующего x^* множества, генерируемого процессом (1.10).

Структура работы следующая: в п. 2 устанавливаются необходимые промежуточные оценки, п. 3 посвящен доказательству оценки (1.13), в п. 4 устанавливается наличие у системы (1.10) минимального аттрактора.

2. Вспомогательные оценки. Введем обозначение

$$\tilde{\Phi}(x) = \xi - \Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha)\tilde{F}'^*(x)(\tilde{F}(x) - \tilde{F}'(x)(x - \xi)). \tag{2.1}$$

С учетом (2.1) задача Коши (1.10) принимает вид

$$\dot{x} = \tilde{\Phi}(x) - x, \quad x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

Используя представление Рисса–Данфорда для функций линейных непрерывных операторов [7, с. 455] и условия, наложенные в п. 1 на оператор $\tilde{F}(x)$ и функцию $\Theta(\lambda, \alpha)$, убеждаемся, что для любого $z_0 \in \Omega_R(x^*)$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что с некоторыми константами N_1, N_2 , зависящими, вообще говоря, от z_0, ε_0 , выполняются неравенства

$$\|\tilde{\Phi}(x)\| \leq N_1, \quad \|\tilde{\Phi}(x_1) - \tilde{\Phi}(x_2)\| \leq N_2 \|x_1 - x_2\| \quad \forall x, x_1, x_2 \in \Omega_{\varepsilon_0}(z_0). \tag{2.3}$$

Отсюда следует (см., например, [8, с. 397]), что решение $x = x(t)$ задачи Коши (1.10) существует при $t \in [0, \tilde{T}]$ с некоторым $\tilde{T} = \tilde{T}(x_0) > 0$ и единственно на этом отрезке времени. Поскольку $x_0 \in \Omega_R(x^*)$, а функция $x = x(t)$ непрерывна на $[0, \tilde{T}]$, величина \tilde{T} может быть выбрана столь малой, что $x(t) \in \Omega_R(x^*)$ для всех $t \in [0, \tilde{T}]$.

С использованием (2.1), (2.2) и представления [8, с. 376]

$$\tilde{F}(x) = \tilde{F}(x^*) + \tilde{F}'(x)(x - x^*) + \tilde{G}(x), \quad \|\tilde{G}(x)\| \leq \frac{1}{2} L \|x - x^*\|^2, \tag{2.4}$$

справедливого для всех $x \in \Omega_R(x^*)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|x - x^*\|^2 \right) &= (\tilde{\Phi}(x) - x, x - x^*) = - \left(\Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha)\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}(x^*), x - x^* \right) - \\ &- \left(\Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha)\tilde{F}'^*(x)\tilde{G}(x), x - x^* \right) - \|x - x^*\|^2 - \\ &- \left(\left[E - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha)F'^*(x^*)F'(x^*) \right] (x^* - \xi), x - x^* \right) + \\ &+ \left(\left[\Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha)\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x) - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha)F'^*(x^*)F'(x^*) \right] (x^* - \xi), x - x^* \right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь E — единичный оператор в H_1 , скобками (\cdot, \cdot) обозначается скалярное произведение пространства H_1 . Оценим отдельные слагаемые в правой части последнего равенства в (2.5). На основании (1.3), (1.11) и (2.4) справедливы оценки

$$\left\| \Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha)\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}(x^*) \right\| \leq \left\| \Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha)\tilde{F}'^*(x) \right\| \|\tilde{F}(x^*)\| \leq \frac{C_1 \delta}{\sqrt{\alpha}}, \tag{2.6}$$

$$\left\| \Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha)\tilde{F}'^*(x)\tilde{G}(x) \right\| \leq \frac{C_1 L \|x - x^*\|^2}{2\sqrt{\alpha}}. \tag{2.7}$$

Из (1.8), (1.12) далее получаем при $C_2 = \max \{C_2(0), C_2(p)\}$

$$\begin{aligned} & \left\| \left[E - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha) F'^*(x^*)F'(x^*) \right] (x^* - \xi) \right\| \leq \\ & \leq \left\| \left[E - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha) F'^*(x^*)F'(x^*) \right] (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v \right\| + \\ & + \left\| \left[E - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha) F'^*(x^*)F'(x^*) \right] w \right\| \leq C_2 (\|v\| \alpha^p + \Delta). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оценку последнего слагаемого в (2.5) проведем, наложив на порождающую функцию $\Theta(\lambda, \alpha)$ следующие дополнительные условия.

Условие D. Области аналитичности D_α функций $\Theta(\cdot, \alpha)$ таковы, что существует семейство замкнутых спрямляемых контуров $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$, охватывающих отрезок $[0, N^2]$ и обладающих свойствами

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \sup_{\lambda \in \Gamma_\alpha} |\lambda| < \infty, \quad \sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \sup_{\lambda \in \Gamma_\alpha} \sup_{\mu \in [0, N^2]} \frac{|\lambda| + \mu}{|\lambda - \mu|} < \infty.$$

Условие E. Для контуров Γ_α из условия D имеет место соотношение

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|}{|\lambda|} |d\lambda| < \infty.$$

Требуемое в условиях D, E семейство $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0]}$ легко строится для всех наиболее распространенных порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$ (см. [3, с. 109–110]).

Ниже через $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ обозначается резольвента линейного непрерывного оператора $A: H_1 \rightarrow H_1$. Поскольку спектры операторов $\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x)$, $F'^*(x)F'(x)$, $x \in \Omega_R(x^*)$, принадлежат отрезку $[0, N^2]$, на основании представления Рисса–Данфорда [7, с. 455] имеем

$$\begin{aligned} & \left[\Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha) \tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x) - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha) F'^*(x^*)F'(x^*) \right] (x^* - \xi) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} (1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda) \left[R(\lambda, \tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x)) - R(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)) \right] (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v d\lambda + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} (1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda) \left[R(\lambda, \tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x)) - R(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)) \right] w d\lambda. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для первого из подынтегральных выражений в (2.9) в силу (1.2), (1.3), как и в [3, с. 104], получаем оценку

$$\left\| \left[R(\lambda, \tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x)) - R(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)) \right] (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v \right\| \leq \frac{C_4 \|v\|}{|\lambda|} (L \|x - x^*\| + \delta) \quad (2.10)$$

для любых $\lambda \in \Gamma_\alpha$ и $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Поскольку в силу условия D

$$\left\| R(\lambda, \tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x)) \right\| \leq \sup_{\mu \in [0, N^2]} \frac{1}{|\lambda - \mu|} \leq \frac{C_5}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \Gamma_\alpha, \quad \alpha \in (0, \alpha_0],$$

для всех $\lambda \in \Gamma_\alpha$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$, имеем

$$\left\| R(\lambda, \tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x)) - R(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)) \right\| \leq \frac{2C_5}{|\lambda|}. \quad (2.11)$$

Объединяя соотношения (2.9)–(2.11), с учетом условия E получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \left[\Theta(\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x), \alpha) \tilde{F}'^*(x)\tilde{F}'(x) - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha) F'^*(x^*)F'(x^*) \right] (x^* - \xi) \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|}{|\lambda|} \left(C_4 \|v\| (L \|x - x^*\| + \delta) + 2C_5 \Delta \right) |d\lambda| \leq C_6 (L \|v\| \|x - x^*\| + \|v\| \delta + \Delta). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.5) – (2.8), (2.12) следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|x - x^*\|^2 \right) \leq & \left(\frac{C_1 \delta}{\sqrt{\alpha}} + C_2 \|v\| \alpha^p + C_6 \|v\| \delta + C_7 \Delta \right) \|x - x^*\| + \\ & + C_6 L \|v\| \|x - x^*\|^2 + \frac{C_1 L \|x - x^*\|^3}{2\sqrt{\alpha}} - \|x - x^*\|^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Применяя неравенство $|ab| \leq 2^{-1} \varepsilon a^2 + (2\varepsilon)^{-1} b^2$, $\varepsilon > 0$, последовательно при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $\varepsilon = \frac{2\alpha}{C_1 L}$, получаем

$$\left(\frac{C_1 \delta}{\sqrt{\alpha}} + C_2 \|v\| \alpha^p + C_6 \|v\| \delta + C_7 \Delta \right) \|x - x^*\| \leq \frac{1}{4} \|x - x^*\|^2 + \left(\frac{C_1 \delta}{\sqrt{\alpha}} + C_2 \|v\| \alpha^p + C_6 \|v\| \delta + C_7 \Delta \right)^2, \quad (2.14)$$

$$\frac{C_1 L \|x - x^*\|^3}{2\sqrt{\alpha}} = C_1 L \|x - x^*\|^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \|x - x^*\| \right) \leq \frac{1}{4} \|x - x^*\|^2 + \frac{(C_1 L)^2}{4\alpha} \|x - x^*\|^4. \quad (2.15)$$

Объединяя оценки (2.13) – (2.15), окончательно находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|x - x^*\|^2 \right) \leq -\frac{1}{2} \|x - x^*\|^2 + \frac{(C_1 L)^2}{4\alpha} \|x - x^*\|^4 + \left(\frac{C_1 \delta}{\sqrt{\alpha}} + C_2 \|v\| \alpha^p + C_6 \|v\| \delta + C_7 \Delta \right)^2 \quad (2.16)$$

для $0 \leq t \leq \tilde{T}$. Введем обозначение $u(t) = \frac{1}{2} \|x(t) - x^*\|^2$. Непосредственно из (2.16) вытекает следующий промежуточный результат.

Теорема 1. Пусть выполняются условия A – E и соотношения (1.2), (1.3), (1.8). Тогда при $t \in [0, \tilde{T}]$ имеет место оценка

$$\dot{u}(t) \leq -u(t) + \frac{C_8}{\alpha} u^2(t) + C_9 \left(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2 \alpha^{2p} + (\|v\| \delta + \Delta)^2 \right). \quad (2.17)$$

Обратимся к доказательству основных утверждений работы.

3. Свойство притяжения. В этом разделе проанализируем характер асимптотического поведения решений $x = x(t)$ задачи (1.10), начинающихся при $t = 0$ в точке x_0 из окрестности решения x^* . Прежде всего надлежит установить существование и единственность решения $x(t)$ при всех $t \geq 0$. С этой целью рассмотрим мажорирующее по отношению к неравенству (2.17) уравнение

$$\dot{y}(t) = -y(t) + \frac{C_8}{\alpha} y^2(t) + C_9 \left(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2 \alpha^{2p} + (\|v\| \delta + \Delta)^2 \right), \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

с начальным условием

$$y(0) = u(0). \quad (3.2)$$

Согласно лемме о дифференциальных неравенствах (см., например, [9, с. 32]) выполняется

$$u(t) \leq y(t), \quad 0 \leq t \leq \tilde{T}. \quad (3.3)$$

Непосредственно проверяется, что при выполнении условия

$$\frac{\delta^2}{\alpha^2} + \frac{(\|v\| \delta + \Delta)^2}{\alpha} + \|v\|^2 \alpha^{2p-1} < \frac{1}{4C_8 C_9} \quad (3.4)$$

уравнение

$$-y + \frac{C_8}{\alpha} y^2 + C_9 \left(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2 \alpha^{2p} + (\|v\| \delta + \Delta)^2 \right) = 0$$

имеет корни $0 < y_1 < y_2$, причем

$$y_1 < 2C_9 \left(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2 \alpha^{2p} + (\|v\| \delta + \Delta)^2 \right), \quad (3.5)$$

$$y_2 > \frac{\alpha}{2C_8}. \quad (3.6)$$

Несложный анализ уравнения (3.1) показывает, что любое его решение $y = y(t)$, такое, что $y_1 < y(0) < y_2$, монотонно убывает при $t \geq 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_1. \quad (3.7)$$

С другой стороны, решения, начинающиеся при $t = 0$ в точке $y(0)$, $0 \leq y(0) \leq y_1$, являются неубывающими и также удовлетворяют (3.7). Тем самым (3.7) имеет место для любого решения $y(t)$ с $0 \leq y(0) < y_2$. Из (3.2), (3.3), (3.6) теперь следует, что если выполняются условия

$$\|x_0 - x^*\| \leq \sqrt{\frac{\alpha}{C_8}}, \quad \alpha < C_8 R^2, \quad (3.8)$$

то в случае $y_1 < u(0) = 1/2 \|x_0 - x^*\|^2$ имеем

$$\|x(t) - x^*\| = \sqrt{2u(t)} \leq \sqrt{2y(t)} \leq \sqrt{2y(0)} = \sqrt{2u(0)} = \|x_0 - x^*\|, \quad 0 \leq t \leq \tilde{T}.$$

Если же $0 \leq u(0) \leq y_1$, то вновь $\|x(t) - x^*\| \leq \sqrt{2y(t)}$, $0 \leq t \leq \tilde{T}$. Поскольку в этом случае функция $y(t)$ неубывающая, ввиду (3.4) выполняется

$$y(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_1 < 2C_9 \left(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2 \alpha^{2p} + (\|v\|\delta + \Delta)^2 \right) < \frac{\alpha}{2C_8},$$

$$\|x(t) - x^*\| < \sqrt{\frac{\alpha}{C_8}}, \quad 0 \leq t \leq \tilde{T}.$$

Следовательно, решение задачи Коши (1.10), начинающееся в замкнутом шаре $\bar{\Omega}_{\sqrt{\alpha/C_8}}(x^*) \subset \Omega_R(x^*)$, не покидает этот шар при $0 \leq t \leq \tilde{T}$. Обозначим через $T^* = T^*(x_0) \geq \tilde{T}$ полное время существования решения задачи (1.10), так что решение $x = x(t)$ определено при $t \in [0, T^*)$ и не допускает однозначного продолжения вперед по времени через $t = T^*$. Будем считать выполненными условия (3.4) и (3.8). Предположим, что $T^* < \infty$, тогда в силу сказанного выше $\sup \{ \|x(t) - x^*\| : t \in [0, T^*) \} < R$, и из (1.10) с учетом неравенств (1.2), (1.11), (1.12) следует

$$\sup \{ \|\dot{x}(t)\| : t \in [0, T^*) \} < \infty. \quad (3.9)$$

Пользуясь последним соотношением, представлением $x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau$, $t \in [0, T^*)$, и критерием Коши, нетрудно показать, что существует предел $\lim_{t \rightarrow T^*-0} \|x(t) - \tilde{x}\| = 0$, $\tilde{x} \in H_1$. Поскольку $\tilde{x} \in \Omega_R(x^*)$, при $z_0 = \tilde{x}$ и подходящем $\varepsilon_0 > 0$ справедливы соотношения (2.3), из которых следует возможность продолжить решение $x(t)$ вперед по времени за значение $t = T^*$. Последнее противоречит определению величины T^* и, значит, $T^* = \infty$. Тем самым доказана

Теорема 2. Пусть выполняются условия А–Е и соотношения (1.2), (1.3), (1.8), (3.4), (3.8). Тогда решение задачи Коши (1.10) однозначно определено для всех $t \geq 0$.

Проанализируем теперь характер поведения $x(t)$, когда $t \rightarrow +\infty$. При выполнении условий теоремы 2 неравенство (3.3) имеет место для всех $t \geq 0$. Поэтому

$$\|x(t) - x^*\| = \sqrt{2u(t)} \leq \sqrt{2y(t)}, \quad t \geq 0. \quad (3.10)$$

Поскольку в наших условиях

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_1,$$

из (3.5), (3.10) следует, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| < C_3 \left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \|v\| \alpha^p + \|v\| \delta + \Delta \right), \quad C_3 = 2\sqrt{C_9}. \quad (3.11)$$

При выводе использовалось элементарное неравенство $\sqrt{a_1 + \dots + a_m} \leq \sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_m}$; $a_1, \dots, a_m \geq 0$. Кроме того, в силу сказанного выше

$$\|x(t) - x^*\| \leq \sqrt{\frac{\alpha}{C_8}}, \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Подытожим полученные результаты.

Теорема 3. Пусть выполняются условия А–Е и соотношения (1.2), (1.3), (1.8), (3.4), (3.8). Тогда для решение задачи Коши (1.10) справедливы неравенства (3.11), (3.12).

Положим

$$r_1(\delta, \Delta, \alpha) = C_3 \left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \|v\| \alpha^p + \|v\| \delta + \Delta \right), \quad r_2(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{C_8}}. \quad (3.13)$$

Теорема 3 утверждает, что при выполнении условий (3.4), (3.8) шар $\Omega_{r_1(\delta, \Delta, \alpha)}(x^*)$ является притягивающим множеством (см. определение в п. 4) для любой точки шара $\bar{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*)$ в силу системы (1.10). Если при этом вместо (3.4) выполняется несколько более жесткое условие

$$\frac{\delta^2}{\alpha^2} + \frac{(\|v\| \delta + \Delta)^2}{\alpha} + \|v\|^2 \alpha^{2p-1} < \frac{1}{12C_8C_9}, \quad (3.14)$$

то из (3.13) с учетом неравенства $(a_1 + \dots + a_m)^2 \leq m(a_1^2 + \dots + a_m^2)$ следует строгое включение

$$\bar{\Omega}_{r_1(\delta, \Delta, \alpha)}(x^*) \subset \bar{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*).$$

Отметим, что в случае фиксированного $\alpha \in (0, 1)$, величины p , значительно превышающей $\frac{1}{2}$, и малых по сравнению с α погрешностей δ, Δ условие (3.14) выполняется, а величина $r_1(\delta, \Delta, \alpha)$ намного меньше $r_2(\alpha)$.

Из (3.11) следует, что для любой точки $x_0 \in \bar{\Omega}_{r_2(\alpha)}$ найдется такой момент $\bar{t}(x_0)$, что $x(t) \in \Omega_{r_1(\delta, \Delta, \alpha)}$ при всех $t \geq \bar{t}(x_0)$. Сказанное означает, что точка $x(t)$, $t \rightarrow +\infty$ может рассматриваться в качестве приближения к x^* , адекватного имеющимся погрешностям δ, Δ .

С другой стороны, представляет интерес исследование поведения траектории $x(t)$ после попадания в шар $\Omega_{r_1(\delta, \Delta, \alpha)}$ (при $t \rightarrow +\infty$) в зависимости от выбора начальной точки x_0 . Рассмотрим эти вопросы подробнее.

4. Существование минимального аттрактора. В этом параграфе предполагаются выполненными условия теоремы 3 с заменой (3.4) неравенством (3.14). Определим метрическое пространство $X = \bar{\Omega}_{r_2(\alpha)}$ с метрикой нормы H_1 и обозначим через $V_t : X \rightarrow X$, $t \geq 0$ (нелинейную) полугруппу, связанную с задачей (1.10): $V_t(x_0) = x(t)$, где $x = x(t)$ есть решение (1.10). Нетрудно видеть, что полугруппа V_t непрерывна, т.е. отображение $(t, y) \rightarrow V_t(y)$ непрерывно по $(t, y) \in \{t : t \geq 0\} \times X$. Следуя [10], говорим, что множество $B_0 \subset X$ притягивает множество $B \subset X$, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_1(\varepsilon, B)$, что множество $V_t(B) \equiv \{z \in X : z = V_t(y), y \in B\}$ при всех $t \geq t_1(\varepsilon, B)$ лежит в $\cup_{y \in B_0} \Omega_\varepsilon(y)$, т.е. в ε -окрестности B_0 . Минимальным аттрактором M полугруппы V_t на пространстве X называется наименьшее по включению непустое замкнутое множество, которое притягивает любое $B \subset X$. Произвольная полугруппа V_t называется точечно диссипативной, если существует множество B_0 , притягивающее любую точку X . Из теоремы 3 следует, что полугруппа, порожденная задачей (1.10), является точечно диссипативной, причем в качестве множества B_0 в нашем случае может быть взят шар $\Omega_{r_1(\delta, \Delta, \alpha)}(x^*)$.

Основная цель последующих рассуждений заключается в обосновании наличия у системы (1.10) и отвечающей ей полугруппы V_t минимального аттрактора в смысле вышеприведенного определения.

Ниже будет использоваться известный критерий наличия минимального аттрактора у полугрупп гиперболического типа [10; теорема 3.1, предложение 3.6]. Приведем соответствующий результат в виде, адаптированном к интересующему нас случаю непрерывной точечно диссипативной полугруппы V_t в метрическом пространстве X , совпадающем с конечным шаром.

Лемма 1. Пусть полугруппа V_t представима в виде $V_t = W_t + U_t$, $t \geq 0$, где семейство операторов W_t обладает свойством

$$\sup_{y \in X} \|W_t(y)\| \leq \nu(t), \quad t \geq 0; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \nu(t) = 0, \quad (4.1)$$

а операторы $U_t : X \rightarrow H_1$, $t \geq 0$, отображают подмножества X в компактные множества. Тогда полугруппа V_t имеет минимальный аттрактор M , который является связным, компактным и инвариантным относительно V_t подмножеством X [10].

Инвариантность аттрактора M означает, что $V_t(M) = M \forall t \geq 0$. Убедимся, что при наложении на $\tilde{F}(x)$ некоторых дополнительных ограничений определяемая (1.10) полугруппа V_t удовлетворяет условиям леммы 1. Следуя [11], напомним, что оператор $G : H_1 \rightarrow H_2$ называется равномерно дифференцируемым

по Фреше на шаре $\Omega_r(\bar{x})$, если имеет место представление

$$G(x+h) - G(x) = G'(x)h + \omega(x, h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(x, h)}{\|h\|} = 0,$$

где $G'(x) \in L(H_1, H_2)$, и по каждому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|h\| < \delta(\varepsilon)$ выполняется $\|\omega(x, h)\| < \varepsilon \|h\| \quad \forall x, x+h \in \Omega_r(\bar{x})$. Здесь и далее $L(H_1, H_2)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из H_1 в H_2 . Напомним также, что оператор $G: H_1 \rightarrow H_2$ называется усиленно непрерывным на выпуклом замкнутом множестве $Y \subset H_1$, если всякую последовательность $\{x_n\} \subset Y$, слабо сходящуюся к x в H_1 , он преобразует в последовательность $\{G(x_n)\}$, сильно сходящуюся к $G(x)$ в H_2 . В силу липшицевости $\tilde{F}'(x)$ оператор $\tilde{F}(x)$ равномерно дифференцируем на $\Omega_R(x^*)$.

Дополнительно к сделанным выше допущениям будем предполагать выполненным следующее

Условие F. Оператор $\tilde{F}(x)$ усиленно непрерывен на $\bar{\Omega}_\rho(x^*)$, $\rho > r_2(\alpha)$.

Заметим, что при выполнении условия F производная $\tilde{F}'(x)$ как элемент $L(H_1, H_2)$ является линейным вполне непрерывным оператором при каждом $x \in \Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$ [11, с. 93]. Кроме того, эта производная усиленно непрерывна как отображение из $\bar{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*)$ в $L(H_1, H_2)$ [11, с. 91].

Лемма 2. *Предположим, что выполняется условие F. Тогда определенный в (2.1) оператор $\tilde{\Phi}(x)$ является вполне непрерывным на $\Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$.*

Доказательство. В силу непрерывности $\tilde{\Phi}(x)$ (см. (2.3)) достаточно установить, что всякая последовательность $\{x_n\} \subset \Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$ имеет подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, вдоль которой $\{\tilde{\Phi}(x_{n_k})\}$ сходится в норме H_2 . Пусть $\{x_{n_k}\}$ — слабо сходящаяся к \tilde{x} подпоследовательность $\{x_n\}$. С учетом условия F и предшествующих лемме замечаний $\{\tilde{F}(x_{n_k})\}$ сильно в H_2 сходится к некоторому элементу $\tilde{f} \in H_2$, а последовательности вполне непрерывных операторов $\{\tilde{F}'(x_{n_k})\}$, $\{\tilde{F}'^*(x_{n_k})\}$ сходятся в нормах $L(H_1, H_2)$, $L(H_2, H_1)$ к некоторым вполне непрерывным операторам \tilde{A} , \tilde{A}^* . Отсюда следует, что последовательность $\{\tilde{F}'^*(x_{n_k})(\tilde{F}(x_{n_k}) - \tilde{F}'(x_{n_k})(x_{n_k} - \xi))\}$ сходится в H_1 к элементу $\tilde{A}^*(\tilde{f} - \tilde{A}(\tilde{x} - \xi))$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что последовательность операторов $\{\Theta(\tilde{F}'^*(x_{n_k})\tilde{F}'(x_{n_k}), \alpha)\}$ сходится в $L(H_1, H_1)$ к $\Theta(\tilde{A}^*\tilde{A}, \alpha)$. Это следует из представления

$$\Theta(\tilde{F}'^*(x_{n_k})\tilde{F}'(x_{n_k}), \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} \Theta(\lambda, \alpha) R(\lambda, \tilde{F}'^*(x_{n_k})\tilde{F}'(x_{n_k})) d\lambda$$

с учетом равномерной по $\lambda \in \Gamma_\alpha$ сходимости $R(\lambda, \tilde{F}'^*(x_{n_k})\tilde{F}'(x_{n_k})) \rightarrow R(\lambda, \tilde{A}^*\tilde{A})$, $k \rightarrow \infty$ в $L(H_1, H_1)$. Лемма доказана.

Обратимся теперь к исследованию полугруппы V_t , порождаемой задачей (1.10) или, что то же, задачей (2.2), при выполнении условия F. Рассмотрим полугруппу линейных операторов W_t , $W_t(x) = \exp(-t)x$, $t \geq 0$, порождаемую уравнением $\dot{x} = -x$. В данном случае условие (4.1) выполняется, причем в качестве $\nu(t)$ можно взять $\nu(t) = (\|x^*\| + r_2(\alpha)) \exp(-t)$. Установленная в лемме 2 полная непрерывность оператора $\tilde{\Phi}(x)$ с учетом сказанного в [12, с. 298–299] означает, что оператор $U_t = V_t - W_t$ является вполне непрерывным при каждом $t \geq 0$. Непосредственным следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия A–F и соотношения (1.2), (1.3), (1.8), (3.8), (3.14). Тогда динамическая система (1.10) имеет на $\Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$ минимальный аттрактор $M \subset \Omega_{r_1(\delta, \Delta, \alpha)}(x^*)$, который является связным, компактным и инвариантным множеством.*

Аттрактор, существование которого гарантируется теоремой 4, можно рассматривать в качестве аппроксимирующего x^* множества, конструкция которого в отличие от индивидуальной траектории не зависит от выбора начальной точки x_0 .

Пример 1. Всем вышеприведенным условиям на $\Theta(\lambda, \alpha)$ удовлетворяет функция

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \lambda^{-1} [1 - (1 - \mu_0 \lambda)^{1/\alpha}], \quad \lambda \neq 0,$$

доопределенная по непрерывности значением $\alpha^{-1}\mu_0$ при $\lambda = 0$, если значение $\alpha^{-1} \in \{1, 2, \dots\}$ и величина $0 < \mu_0 < N^{-2}$. При этом в условии C можно положить $p_0 = \infty$. Оператор $\tilde{\Phi}(x)$ в данном случае имеет вид (см. [3, с. 110])

$$\tilde{\Phi}(x) = x^{(n)},$$

где $n = \alpha^{-1}$, $x^{(0)} = \xi$ и $x^{(k+1)} = (E - \mu_0 \tilde{F}'^*(x) \tilde{F}'(x))x^{(k)} - \tilde{F}'^*(x)(\tilde{F}'(x)x - \tilde{F}(x))$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

В заключение приведем пример оператора $\tilde{F}(x)$, удовлетворяющего наложенным выше ограничениям.

Пример 2. Пусть D — конечномерная область с регулярной границей, функции $\tilde{K} \in C(\overline{D} \times \overline{D})$, $\tilde{g} \in L_2(D)$. Определим оператор $\tilde{F} : H^1(D) \rightarrow L_2(D)$,

$$[\tilde{F}(x)](t) = \int_D \tilde{K}(t, s)x^2(s) ds - \tilde{g}(t), \quad t \in D.$$

Усиленная непрерывность $\tilde{F}(x)$ является следствием компактности вложения $H^1(D) \subset L_2(D)$ и условие Липшица (1.2) проверяется непосредственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 03-01-00352).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
2. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
3. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: Едиториал УРСС, 2002.
4. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итерационных методов // Изв. вузов. Матем. 1958. № 5. 18–31.
5. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А. Итерационные методы ньютоновского типа с проектированием для решения нелинейных некорректных операторных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. 5, № 2. 101–111.
6. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
7. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
8. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1961.
10. Ладыженская О.А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнения Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. 42, № 6. 25–60.
11. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.
12. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию
13.06.2003