

УДК 681.3

## АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРИЕНТИРУЕМЫХ ОГРАНИЧИВАЮЩИХ ОБЪЕМОВ

А. А. Захаров<sup>1</sup>, С. С. Садыков<sup>1</sup>

Рассматривается задача определения пересечений объектов с использованием ограничивающих объемов. Кратко описываются примеры наиболее часто применяемых ограничивающих объемов. Излагаются критерии точности аппроксимации и скорости обнаружения пересечений с помощью ограничивающих объемов. Предлагается усовершенствованный алгоритм определения пересечения объектов с использованием ориентируемых параллелепипедов.

**Введение.** При разработке систем автоматизированного проектирования, визуализации научных данных и виртуальной реальности часто требуется не только отобразить результаты моделирования средствами машинной графики, но и провести анализ текущего расположения синтезируемого предмета относительно других объектов сцены, выполнить проверку на пересечение [1, 2, 5–7]. Необходимость решения этого вопроса вызвана тем, что невозможно одновременное нахождение нескольких объектов в одном месте пространства. Такими объектами, например, могут быть элементы архитектурного сооружения, молекулы веществ, объекты визуальной обстановки. Кроме того, часто требуется визуализировать физические процессы столкновений, скольжений, деформаций, последовательность моделирования которых состоит из двух основных этапов:

- определение момента взаимодействия объектов;
- реагирование на столкновение объектов [5].

При решении задачи пересечения особенно в системах реального времени важно обеспечить точность и скорость определения пересечений. Эта проблема часто усложняется полигональным представлением объектов, поверхность которых образована многочисленным набором треугольников. Объекты, смоделированные таким образом, принято называть многогранниками.

Существенно повысить скорость обнаружения пересечений позволяет использование ограничивающих объемов и их иерархий, аппроксимирующих поверхность объекта более простым образом. Особенно это актуально для систем реального времени, где необходимо осуществлять тест на пересечение для каждого нового положения тел в пространстве. При этом объекты могут подвергаться как преобразованиям сдвига, так и поворота, что накладывает некоторые особенности на процесс определения пересечений с использованием ограничивающих объемов.

В статье кратко рассматриваются наиболее часто применяемые ограничивающие объемы. Описаны возможности определения пересечений с использованием этих объемов. Показаны преимущества и недостатки того или иного вида ограничивающего объема.

Следует отметить, что в системах компьютерной графики постоянно возникает противоречие между точностью и скоростью определения пересечений. Существующие методы определения пересечений с помощью ограничивающих объемов часто не соответствуют всем предъявляемым требованиям. В статье предложен алгоритм, позволяющий сократить количество вычислительных операций для определения пересечений полигональных объектов с использованием ориентируемых ограничивающих объемов.

**1. Виды ограничивающих объектов.** В простейшем случае пересечение двух невыпуклых многогранников можно определить, проверив попарно на пересечение каждую грань обоих объектов. Этот подход неэкономичен и требует  $O(N_1 N_2)$  вычислительных затрат, где  $N_1$  и  $N_2$  — количество граней, образующих каждый из объектов [2]. Более совершенные подходы основаны на применении ограничивающих объектов, имеющих геометрию более простой формы, в результате чего проверка на пересечение выполняется намного быстрее. Наиболее часто применяются следующие виды ограничивающих объектов:

- плоскость;
- сфера;
- объем с привязкой к осям координат (AABB);

<sup>1</sup> Муромский институт Владимирского государственного университета, радиотехнический факультет, ул. Орловская, 23, 602245, г. Муром; e-mail: is@mivlgu.murom.ru

- дискретный ориентируемый многогранник (*k*-dop);
- ориентируемый ограничивающий объем (ОВВ).

**1.1. Плоскость.** Одним из наиболее простых ограничивающих объектов является плоскость. Проверка на пересечение объекта с плоскостью основана на том условии, что две точки  $M_1$  и  $M_2$  лежат по одну сторону от плоскости, если при подстановке координат этих точек в уравнение плоскости числа  $Ax_{M_1} + By_{M_1} + Cz_{M_1} + D_{M_1}$  и  $Ax_{M_2} + By_{M_2} + Cz_{M_2} + D_{M_2}$  имеют одинаковые знаки. В этом случае числа  $A, B, C, D$  — коэффициенты уравнения плоскости. Если числа имеют разные знаки, то точки находятся по разные стороны от плоскости.

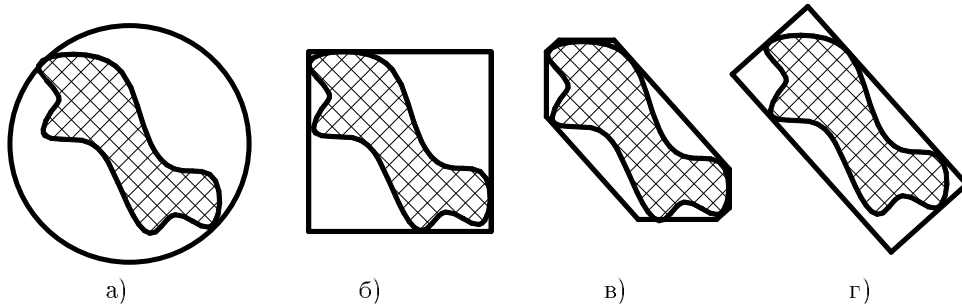


Рис. 1. Ограничивающие объемы: а) сфера, б) объем с привязкой к осям координат (axis-aligned bounding boxes), в) *k*-дискретный ориентируемый многогранник (*k*-discrete orientation polytope), г) ориентируемый ограничивающий объем (Oriented Bounding Boxes)

**1.2. Сфера.** Самой простой ограничивающей оболочкой является сфера (рис. 1, а). В настоящее время существует множество алгоритмов построения ограничивающих сфер. Проверка на пересечение объектов сводится к проверке расстояния между центрами сфер [10–12]. Если расстояние больше суммы радиусов этих сфер, то объекты не пересекаются:  $d > R_1 + R_2$ .

Несмотря на то, что проверка на пересечение при помощи сфер выполняется быстрее других проверок, ограничивающий объем, представленный подобным образом, слабо приближен к поверхности объекта, что отражается на точности определения пересечений. Особенно это заметно при построении выпуклой оболочки вытянутых тел. Так, например, при ограничении отрезка сферой концы отрезка находятся на поверхности ограничивающей оболочки, а центр удален от поверхности сферы на расстояние радиуса.

**1.3. Объем с привязкой к осям координат.** Другим ограничивающим телом является параллелепипед, стороны которого параллельны координатным осям (рис. 1, б). Соответственно, координаты вершин параллелепипеда равны минимальным и максимальным координатам вершин объекта. Такие объемы называются объемами с привязкой к осям координат (axis-aligned bounding boxes — AABB) [4, 5, 8]. Тест на пересечение при использовании AABB в двумерном случае производится как проверка пересечения интервалов (рис. 2, а):

$$[x_{a1}, x_{a2}] \cap [x_{b1}, x_{b2}], [y_{a1}, y_{a2}] \cap [y_{b1}, y_{b2}].$$

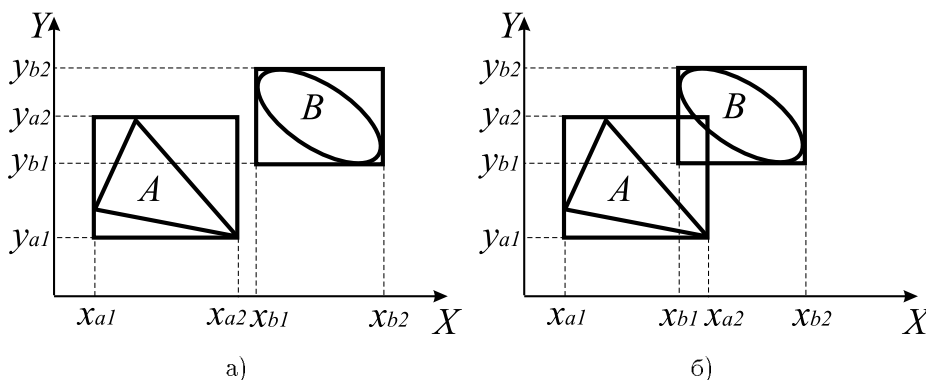


Рис. 2. Определение пересечений на основе объемов с выровненной осью

Недостатком этого подхода является то, что объемы с привязкой к осям координат не всегда с

достаточной степенью точности ограничивают объект. В этом случае ограничивающие объемы могут пересекаться, тогда как сами тела не пересекаются (рис. 2, б). В настоящее время используются различные варианты вычисления ААВВ:

— ограничивающий объем фиксированного размера, который остается постоянным в течении всего времени;

— динамически изменяющийся объем, размер которого пересчитывается каждый раз заново в текущий момент времени.

**1.4. Дискретный ориентированный многогранник.** Расширенным представлением объема с выровненной осью является  $k$ -дискретный ориентированный многогранник ( $k$ -discrete orientation polytop, или  $k$ -dop), где  $k$  — количество сторон [13]. Нормали, восстановленные к каждой стороне, определяют ориентацию  $k$ -dop. Проверка на пересечение производится аналогично ААВВ, но используются дополнительные условия по каждому из рассматриваемых направлений. На рис. 1, в представлен 8-dop.

**1.5. Ориентируемый ограничивающий объем.** Одним из видов ограничивающих тел являются ориентированные ограничивающие объемы (Oriented Bounding Boxes, или ОВВ) [9]. Ориентированные объемы наиболее точно аппроксимируют поверхность ограничиваемого объекта (рис. 1, г). При этом сама оболочка, в отличие от ААВВ и  $k$ -dop, изменяет свою ориентацию в пространстве в соответствии с вращением ограничиваемого объекта. Известны два основных способа определения пересечений объектов с использованием ОВВ.

**Теорема 1.** *Два многогранника пересекаются без полного включения одного в другой тогда и только тогда, когда существует ребро одного многогранника, пересекающее некоторую грань другого.*

Согласно этой теореме, для тестирования на пересечение двух ориентированных параллелепипедов необходимо осуществить 144 теста ( $2 \times 6$  граней  $\times 12$  ребер).

**Теорема 2.** *Два непересекающихся выпуклых многогранника могут быть разделены плоскостью, которая либо параллельна грани одного из них, либо содержит ребра каждого из многогранников.*

Чтобы определить, пересекаются ли многогранники, необходимо и достаточно исследовать их проекции на линию, перпендикулярную плоскости, определенную в теореме 2. Если проекции двух объектов не пересекаются, то не пересекаются и сами объекты (рис. 3).

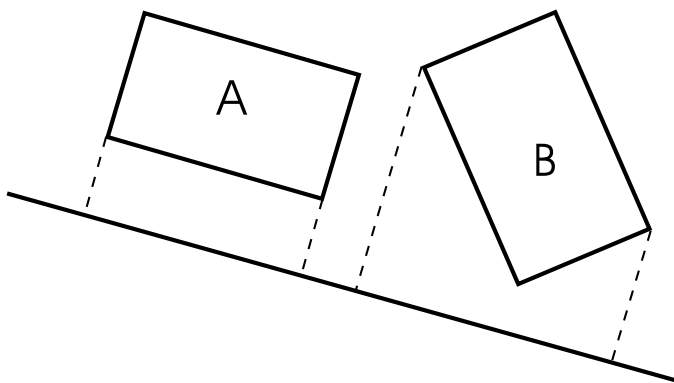


Рис. 3. Проверка на пересечение двух ОВВ с использованием разделяющих осей

В таком случае эта линия называется разделяющей осью. Следовательно, проверка на пересечение заключается в нахождении всех потенциально возможных разделяющих осей и исследовании проекций многогранников на эти оси. Если разделяющая ось найдена, остальные случаи уже не исследуются. Для двух прямоугольных областей в трехмерном пространстве есть 15 потенциально возможных разделяющих осей: три оси для граней первой области, три — для второй, а также девять осей, образованных ребрами первой и второй ОВВ-областей.

**1.6. Использование деревьев ограничивающих объемов.** Не всегда с достаточной степенью точности можно ограничить один объект каким-либо объемом. Выходом из данной ситуации является использование деревьев ограничивающих объемов [9, 12]. На рис. 4 изображены деревья ориентированных ограничивающих объемов. В результате использования подобных иерархий повышается точность, но увеличивается время определения пересечений.

**2. Критерии оценки ограничивающих объемов.** Критериями оценки точности приближения ограничивающего объема является плотность и коэффициент сжатия [3, 9].

**Определение 1.** *Плотность  $\tau$  ограничивающего объема  $V$  относительно ограничиваемой геоме-*

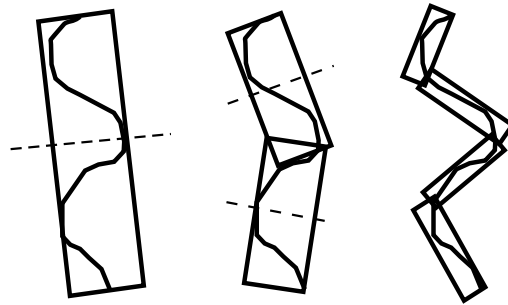


Рис. 4. Деревья ОВВ

трии  $G$  представляет собой Хаусдорфово расстояние  $\text{dist}(b, g)$  между множествами  $B$  и  $G$ :

$$\tau = \max_{b \in G} \min_{g \in G} \text{dist}(b, g).$$

**Определение 2.** Диаметр ограничивающего объема относительно множества  $G$  является максимальное расстояние  $\text{dist}(g, h)$  между двумя парами точек  $g$  и  $h$ , принадлежащими этому множеству:

$$d = \max_{g, h \in G} \text{dist}(g, h).$$

**Определение 3.** Коэффициент сжатия ограничивающего объема представляет собой отношение плотности ограничивающего объема к его диаметру (рис. 5):

$$\rho = \frac{\tau}{d}.$$

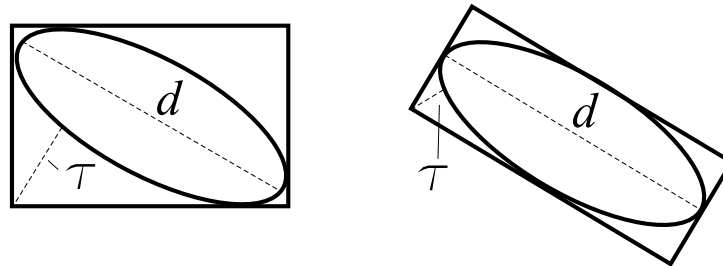


Рис. 5. Зависимость плотности ограничивающего объема от его вида

Кроме точности представления поверхности, важным критерием для иерархии ограничивающих объемов является время обнаружения пересечений, определяемое следующим образом [3, 14]:

$$T = N_v C_v + N_p C_p,$$

где  $T$  — общее время обнаружения пересечений,  $N_v$  — число пар ограничивающих объемов, тестируемых на пересечение,  $C_v$  — время обнаружения пересечений между парой ограничивающих объемов,  $N_p$  — число примитивов, тестируемых на пересечение,  $C_p$  — время определения пересечений примитивов.

Совокупность представленных параметров влияет на выбор того или иного объема в конкретной ситуации.

**3. Алгоритм определения пересечений с использованием ориентируемых параллелепипедов.** Представляемый алгоритм основан на теореме 1 и позволяет сократить количество вычислений за счет информации о взаимном расположении граней двух тестируемых ОВВ. Предполагается, что в очередной момент времени на пересечение будут проверяться только те грани и их ребра ограничивающего объема, которые будут лицевыми по отношению к другому параллелепипеду.

**Определение 4.** Грань одного параллелепипеда по отношению к другому называется *лицевой*, если угол между осью, соединяющей центры ОВВ, и нормалью к грани меньше  $90^\circ$  (рис. 6).

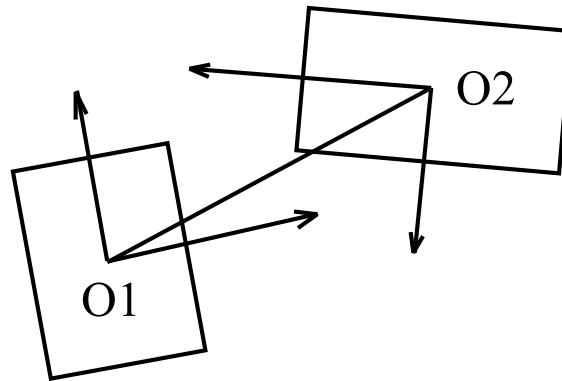


Рис. 6. Определение лицевых граней

Вектор  $\overline{O_1O_2}$  имеет вид

$$\overline{O_1O_2} = (x_{O_2} - x_{O_1}, y_{O_2} - y_{O_1}, z_{O_2} - z_{O_1})^T.$$

Значение косинуса угла между вектором  $\overline{O_1O_2}$  и нормалью  $\overline{N}$  к граням ОБВ определяется из следующего выражения:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{O_1O_2} \cdot \overline{N}}{|\overline{O_1O_2}| \cdot |\overline{N}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Таким образом, дополнительно для каждого параллелепипеда необходимо вычислить по три значения косинуса. После определения лицевых граней в каждом из двух объемов производится проверка на взаимное пересечение этих граней и их ребер.

Прямоугольник в параметрической форме можно описать некоторой точкой  $A$  и двумя векторами  $\overline{u}$  и  $\overline{v}$ , исходящими из этой точки и совпадающими с ребрами прямоугольника:

$$A + \alpha\overline{u} + \beta\overline{v}, \quad 0 \leq \alpha, \quad \beta \leq 1. \quad (1)$$

Отрезок, представляющий в данном случае ребро, в параметрическом виде выглядит так:

$$P_1 + \lambda(P_2 - P_1), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2)$$

Для определения пересечений ребра и грани приравняем выражения (1) и (2):

$$A + \lambda\overline{u} + \beta\overline{v} = P_1 + \lambda(P_2 - P_1). \quad (3)$$

В матричном виде уравнение (3) выглядит следующим образом:

$$(\overline{u}, \overline{v}, P_1 - P_2) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{bmatrix} = P_1 - A. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) существует, если  $\det(\overline{u}, \overline{v}, P_1 - P_2) \neq 0$ . Это означает, что векторы  $\overline{u}$ ,  $\overline{v}$  и  $P_1 - P_2$  не лежат в одной плоскости. Для проверки на пересечение необходимо вычислить значения

$$(\alpha, \beta, \lambda)^T = (\overline{u}, \overline{v}, P_1 - P_2)^{-1}(P_1 - A)$$

и проверить условия  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, 0 \leq \lambda \leq 1$ .

Таким образом, за счет выявления лицевых граней получаем значительный выигрыш в вычислениях. В трехмерном пространстве каждый ориентируемый параллелепипед имеет три лицевые грани, которые в совокупности составлены из девяти ребер. Поэтому общая проверка на пересечение состоит из следующих операций:

— определение лицевых граней (шесть операций);

— проверка на пересечение выявленных граней и ребер ( $2 \times (3 \times 9) = 54$ ). В результате вместо 144 тестов получаем 60.

**Заключение.** Следует отметить, что не всегда при определении пересечений необходимо использовать только один вид ограничивающего объема. Так, например, ОВВ подходят больше всего для тел, к которым часто применяются аффинные преобразования переноса и вращения. Кроме того, эти тела должны иметь иглоподобную, вытянутую форму. Если точность в системе не играет решающей роли и объект не имеет ярко выраженной иглоподобной формы, то из-за простоты определения пересечений лучше применять сферические оболочки. Объемы с привязкой к осям координат и дискретные ориентированные многогранники больше всего подходят в том случае, если объект находится в покое или практически не вращается. В этом случае нет необходимости в каждый момент времени заново пересчитывать ограничивающий объем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров А.А., Масанов А.Н.* Некоторые задачи представления местности для тренажеров наземного транспорта. Деп. в ВИНТИ РАН 28.03.02. № 561-В2002.
2. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1989.
3. *Садыков С.С., Захаров А.А.* Исследование алгоритмов генерации изображений в тренажерных системах // Данные, информация и их обработка. М.: Телеком, 2002. 38–42.
4. *Шикин Е.В., Боресков А.В.* Компьютерная графика. Полигональные модели. М.: ДИАЛОГ–МИФИ, 2000.
5. *Эйнджел Э.* Интерактивная компьютерная графика. Вводный курс на базе OpenGL. М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001.
6. Компьютерные технологии в науке, производстве, социальных и экономических процессах. Тр. III Междунар. науч.-практ. конф. Новочеркасск: ООО НПО “ТЕМП”, 2002.
7. Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций. Тр. Междунар. науч.-техн. конф. Рязань: РГРА, 2002.
8. *Cohen J., Lin M., Manocha D., Ponamgi M.* I-collide: an interactive and exact collision detection system for large-scale environments // Proc. of ACM Interactive 3D Graphics Conference. New York: ACM SIGGRAPH, 1995. 189–196.
9. *Gottschalk S., Lin M., Manocha D.* Obb-tree: a hierarchical structure for rapid interference detection // Proc. of ACM Siggraph-96. New York: ACM SIGGRAPH, 1996. 171–180.
10. *Hopcroft J.E., Schwartz J.T., Sharir M.* Efficient detection of intersections among spheres // The Intern. J. of Robotics Research. 1983. 4, N 4. 77–80.
11. *Hubbard P.M.* Collision detection for interactive graphics applications // IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics. 1995. 3, N 1. 218–230.
12. *Hubbard P.M.* Approximating polyhedra with spheres for time-critical collision detection // ACM Trans. on Graphics. 1996. N 3. 179–210.
13. *Klosowski J., Held M., Mitchell J.S.B., Sowizral H., Zikan K.* Efficient collision detection using bounding volume hierarchies of  $k$ -dops // Proc. of ACM Siggraph-96. New York: ACM SIGGRAPH, 1996. 151.
14. *Weghorst H., Hooper G., Greenberg D.* Improved computational methods for ray tracing // ACM Trans. on Graphics. 1984. 3, N 1. 52–69.

Поступила в редакцию  
01.04.2003

---