

УДК 519.6

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПУЧКОВ ЭЛЕКТРОНОВ В ОДНОМЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

Г. Л. Сидельников<sup>1</sup>, А. С. Старовойтов<sup>1</sup>

Рассмотрены различные численные методы при моделировании динамики пучков электронов в одномерной плазме. Исследованы апостериорные оценки. Даны выводы о целесообразности применимости методов.

Рассмотрим холодную полуграниченную плазму, занимающую область  $z > 0$ , в которую инжектируется сгусток с плотностью частиц

$$dn_{\text{ext}} = -\frac{i(t_0)}{e} \frac{1}{v_L(t_0, z)} \delta(t - t_L(t_0, z)) dt_0,$$

где  $e$  — заряд электрона (знак “-” в явной форме выражает его отрицательность),  $v_L(t_0, z)$  — лагранжева скорость заряженной частицы,  $t_L(t_0, z)$  — лагранжево время заряженной частицы,  $i(t_0)$  — ток сгустка в плоскости инжекции,  $t_0$  — время влета заряженной частицы в плазму,  $z$  — продольная координата (расстояние, пройденное заряженной частицей от плоскости инжекции),  $\delta(t - t_L)$  — дельта-функция Дирака. Тепловым разбросом частиц в сгустке пренебрегаем. Система плазма-пучок предполагается неограниченной в поперечном направлении, вследствие чего, не нарушая общности рассуждений, заряженная частица может быть представлена заряженной плоскостью.

В отсутствие магнитного поля, в рассматриваемой одномерной геометрии, возбуждаемое сгустком потенциальное электрическое поле описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \vec{j}}{c} = 0, \quad m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E},$$

где  $\vec{j} = -en_p(z)\vec{v}_p - e\vec{v}_L(t_0, z) dn_{\text{ext}} = -en_p(z)v_p - eN\delta(t - t_L(t_0, z))$ ,  $N = -\frac{i(t_0)}{e} dt_0$  — число частиц в сгустке, которые после преобразования приобретают следующий вид (ввиду одномерности модели здесь и далее знак вектора опустим):

$$\frac{\partial E_\delta}{\partial t} - 4\pi en_p(z)v_p - 4\pi eN\delta(t - t_L(t_0, z)) = 0, \quad \frac{\partial v_p}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_\delta,$$

где  $v_p$  — возмущенная скорость частиц плазмы,  $m$  — масса электрона,  $n_p(z)$  — плотность частиц плазмы; в случае  $n_p(z) \equiv \text{const}$  плазма однородна.

Решение этой системы можно получить методом преобразований Фурье; после подстановки найденного  $E$  в уравнение движения частиц сгустка  $\frac{dp_L}{dt} = -eE$  [1] самосогласованная система уравнений, описывающая нелинейную динамику цепочки сгустков, получит вид

$$\frac{d\gamma_L}{d\zeta} = -\beta_0^2 \alpha \int_{-\infty}^{\tau_L + \zeta} T(\tau'_0) \theta(\tau_L - \tau'_L) \cos(\tau_L - \tau'_L) d\tau'_0, \quad \frac{d\tau_L}{d\zeta} = \frac{\beta_0}{\beta_L} - 1, \quad (1)$$

где  $\zeta = \omega_p z / v_0$  — нормализованная координата,  $\omega_p$  — плазменная частота,  $v_0$  — начальная скорость частиц сгустка;  $\gamma_L(\tau_0, \zeta)$  — релятивистский фактор-частицы, входящей в плазму в безразмерный момент времени  $\tau_0 = \omega_p t_0$ ,  $t_0$  — время влета,  $\tau_L(\tau_0, \zeta)$  — безразмерное лагранжево время,  $\beta_0 = v_0/c$ ,  $\beta_L = v_L/c = (1 - 1/\gamma_L^2)^{1/2}$ ,  $v_L$  — лагранжева скорость частицы,  $\alpha = n_b/n_p$ ,  $n_b$  — плотность частиц сгустка,  $n_p$  — плотность плазмы,  $\theta(x)$  — функция Хевисайда, равная единице для  $x > 0$  и нулю для  $x \leq 0$ ,

<sup>1</sup> Белгородский государственный университет, физико-математический факультет, ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород; e-mail: Stalst@yandex.ru, Starovoirov@bsu.edu.ru

$\tau'_L \equiv \tau_L(\tau'_0, \zeta)$ ,  $T(\tau)$  — функция, описывающая профиль плотности всей последовательности сгустков (для рассматриваемого нами случая — это сумма прямоугольных импульсов).

Проведем дискретизацию функций  $\gamma_L(\tau_0, \zeta)$  и  $\tau_L(\tau_0, \zeta)$ . Для этого введем сетку по продольной координате  $\zeta$  (т.е. множество точек  $w_\zeta(n) = \{\zeta_j = jh, j = 0, 1, \dots, n, hn = z_{\max}\}$ , где  $z_{\max}$  — исследуемая протяженность плазмы и  $n$  — количество точек дискретизации) и сетку по безразмерному времени влета  $\tau_0$  (т.е. множество точек  $w_\tau(m) = \{\tau_{0,(i)} = (i-1)h, i = 1, 2, \dots, m, h(m-1) = \tau_*\}$ , где  $\tau_*$  — временная протяженность сгустка и  $m$  — количество частиц в сгустках). После дискретизации получим функции  $\gamma_L(\tau_{0,(i)}, \zeta_j)$  и  $\tau_L(\tau_{0,(i)}, \zeta_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$ .

Подынтегральная функция уравнения (1) не зависит от  $\gamma_L(\tau_0, \zeta)$ , что дает нам возможность вычислять интеграл простыми методами (прямоугольников, трапеций, Симпсона и др.), не используя численные методы решения интегральных уравнений [2]. Если не считать явной перекрестной связи неизвестных функций  $\gamma_L(\tau_0, \zeta)$  и  $\tau_L(\tau_0, \zeta)$  с их производными, мы имеем стандартную задачу Коши для системы двух дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\gamma_L(\tau_{0,(i)}, \zeta_0) = \gamma_0, \quad \tau_L(\tau_{0,(i)}, \zeta_0) = \tau_{0,(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Иными словами, энергия частиц на входе в плазму одинакова для каждой частицы, а безразмерное лагранжево время частиц на входе в плазму принимается равным безразмерному времени влета частиц, если вести отсчет лагранжева времени от первой частицы, время влета которой равно нулю.

Далее наша задача распадается на две: исследовать численные методы вычисления интеграла с переменным верхним пределом и исследовать численные методы решения задачи Коши для системы двух дифференциальных уравнений. Для вычисления интегралов нами использовались методы прямоугольников, трапеций и Симпсона, а для решения задачи Коши применялись одношаговые методы Рунге–Кутты различных порядков аппроксимации и многошаговые методы Адамса. Реализация и исследование численных методов решения осуществляется программой Dynamic 1.0 [3], написанной на языке программирования Delphi 5.0. Вычисления проводились на ЭВМ Pentium III (400 МГц, 128 Мб, Windows 98) с машинным представлением чисел в двоичной системе счисления с 64 разрядной мантисой, что позволяет свести ошибку округления  $\delta(x)$  к  $O(10^{-19})$ .

Исследуем апостериорную асимптотическую оценку глобальной погрешности приближенного вычисления интеграла по правилу Рунге [4]. Если использовать сетки  $w_\tau(k)$  и  $w_\tau(2k)$  с шагами  $h$  и  $h/2$  соответственно, то по правилу Рунге имеем

$$R_i \approx \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_i}{2^s - 1}, \tag{2}$$

где  $s$  — порядок аппроксимации метода численного интегрирования,  $\bar{y}_i$  — значение интеграла, вычисленное на сетке с шагом  $h/2$  в некоторой точке  $x_i$ ,  $\bar{y}_i$  — значение интеграла, вычисленное на сетке с шагом  $h$  в той же точке,  $R_i$  — оценка глобальной погрешности решения. Максимум глобальной погрешности на всем отрезке интегрирования оценивается по формуле

$$R = \max(R_i), \quad 1 \leq n \leq k, \tag{3}$$

где  $R_i$  вычисляется в каждой точке сетки  $w_\tau(k)$ .

Данные формулы применимы только в области реальной асимптотики  $0 < \underline{h} < h < \bar{h}$ , где  $\underline{h} = 1 \cdot 10^{-10}$  и  $\bar{h} = 1 \cdot 10^{-1}$  выбираются с учетом физической реализуемости математической модели [5].

В дальнейшем нам будет удобнее использовать не шаг сетки  $h$ , а количество узлов сетки  $m$ , связанных соотношением

$$h(m-1) = \tau_*, \tag{4}$$

где  $\tau_*$  — временная протяженность сгустка. При  $\tau_* = \pi/3$  область реальной асимптотики можно представить в виде  $12 \leq m \leq 1 \cdot 10^{10}$ . В действительности же мы будем использовать интервал  $12 \leq m \leq 1 \cdot 10^4$ , потому что на большее не хватает вычислительной мощности.

Зависимость апостериорной оценки погрешности методов прямоугольников, трапеций и Симпсона от количества частиц в сгустках  $m$  по правилу Рунге (3) для сеток  $\{w_\tau(m), m = 12, 24, 50, 100, \dots, 6400\}$  представлена на рис. 1.

На рис. 2 показана зависимость времени счета полного цикла вычислений неизвестных функций  $\gamma_L(\tau_0, \zeta)$  и  $\tau_L(\tau_0, \zeta)$  от количества частиц в сгустках с применением указанных методов. Для решения задачи Коши использовался метод Рунге–Кутты первого порядка аппроксимации с количеством точек дискретизации по продольной координате 100.

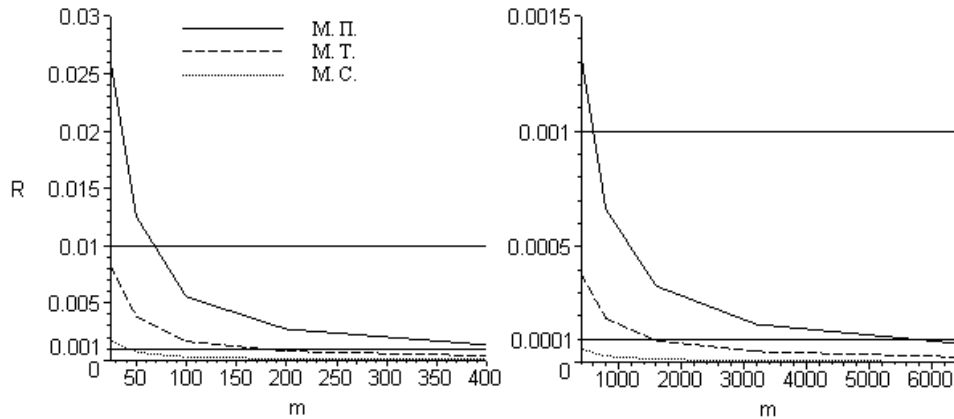


Рис. 1. Зависимость погрешности  $R$  от количества частиц  $m$  (отсутствие гладкости кривой связано с дискретностью шага сетки)

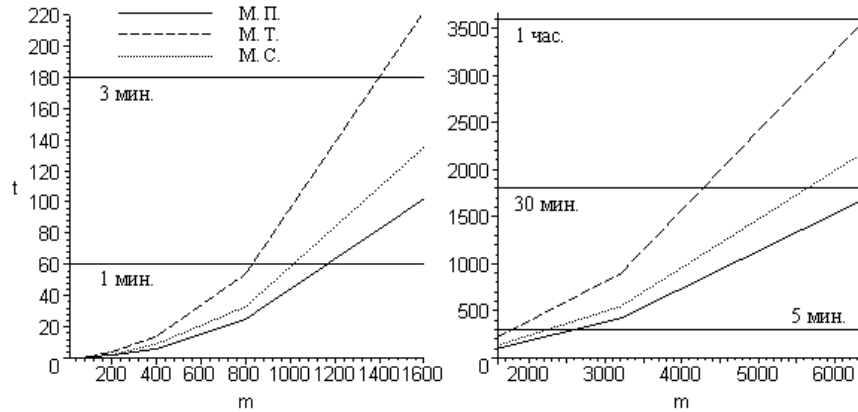


Рис. 2. Зависимость времени счета от количества частиц  $m$  на сетке  $w_\zeta(100)$

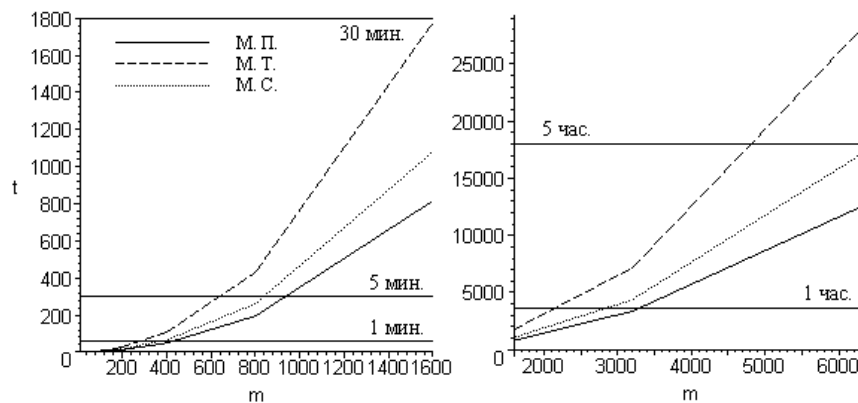


Рис. 3. Зависимость времени счета от количества частиц  $m$  на сетке  $w_\zeta(800)$

При увеличении точек дискретизации по продольной координате до 800 время счета сильно увеличивается и его изменение можно увидеть на рис. 3.

Из сказанного можно сделать следующий вывод: метод прямоугольников, являясь самым быстрым в реализации, имеет полную погрешность порядка  $10^{-2}$  при  $m > 80$  и  $10^{-3}$  при  $m > 600$ , что в рамках выбранной нами математической модели является приемлемым.

Такая высокая точность метода первого порядка аппроксимации возможна ввиду гладкости подинтегральной функции  $\cos(\tau_L - \tau'_L)$ ; в связи с этим можно еще уменьшить время вычислений, конечно, с

повышением порядка полной погрешности, если вычислять интеграл с удвоенным шагом. Если необходимо повысить точность вычислений, то надо использовать метод Симпсона, который имеет полную погрешность порядка  $10^{-2}$  при  $m > 20$  и  $10^{-3}$  уже при  $m > 50$ , а время счета немногим больше времени метода прямоугольников. Для уменьшения погрешности можно использовать сплайн-методы более высоких порядков аппроксимации, время счета которых увеличивается не линейно с ростом порядка, так как счет ведется по трем, четырем либо более узлам одновременно (в отличие от метода прямоугольников, при котором счет ведется по двум узлам. Метод трапеций, как мы видим, оказался самым длительным по времени, хотя и не самым точным.

Рассмотрим вторую задачу: исследование численных методов решения задачи Коши. Выберем для исследования методы Рунге–Кутты первого и третьего порядков аппроксимации и метод Адамса второго порядка (РК1, РК3 и Ад2 соответственно). Аналогичным образом поступим с сеткой по продольной координате  $w_\zeta$ , т.е. перейдем в обозначениях от шага сетки  $h$  к количеству узлов сетки  $n$ , связанных соотношением

$$hn = z_{\max}. \tag{5}$$

Для  $z_{\max} = 20\pi$  будем исследовать интервал  $50 \leq n \leq 1 \cdot 10^4$ . При вычислении интегралов во всех случаях будем использовать метод прямоугольников как наиболее быстрый и достаточно точный.

Зависимости глобальной погрешности вычисления  $\gamma_L(\tau_0, \zeta)$  и  $\tau_L(\tau_0, \zeta)$  от количества частиц  $m$ , полученные по правилу Рунге (2) для сеток по времени влета частиц  $\{w_\tau(m), m = 12, 24, 50, 100, \dots, 6400\}$  на сетке по продольной координате  $w_\zeta(200)$  представлены на рис. 4 и 5 соответственно.

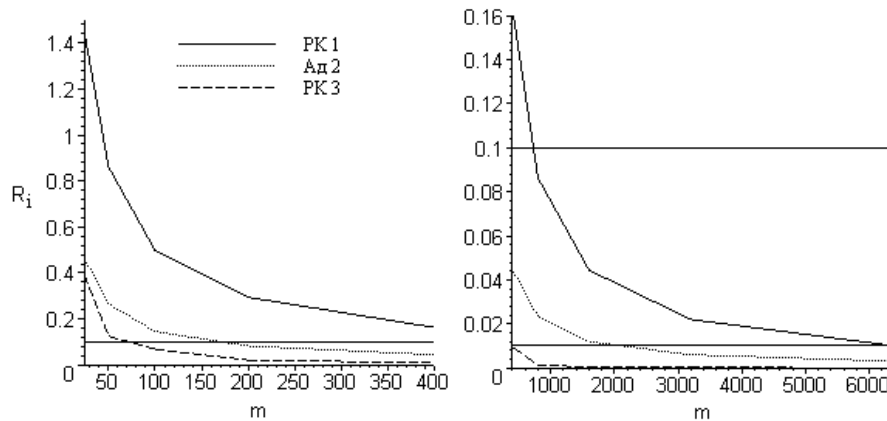


Рис. 4. Зависимость глобальной погрешности  $R_i$  для  $\gamma_L(\tau_0, \zeta)$  от количества частиц сгустков  $m$  на сетке  $w_\zeta(200)$

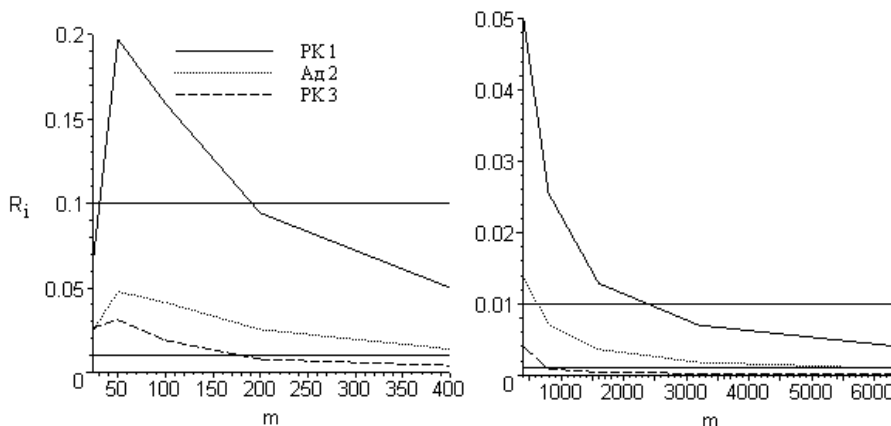


Рис. 5. Зависимость глобальной погрешности  $R_i$  для  $\tau_L(\tau_0, \zeta)$  от количества частиц сгустков  $m$  на сетке  $w_\zeta(200)$

При рассмотрении сеток  $w_\zeta$  с меньшим количеством узлом, чем 200, погрешности ведут себя неоднородно, а при увеличении узлов поведение графиков практически не меняется.

На рис. 6 представлены зависимости глобальной погрешности вычисления  $\gamma_L(\tau_0, \zeta)$  и  $\tau_L(\tau_0, \zeta)$  от количества точек дискретизации по продольной координате, полученные по правилу Рунге (2) для сеток  $\{w_\zeta(n), n = 50, 100, 200, \dots, 6400\}$  на сетке по времени влета  $w_\tau(200)$ .

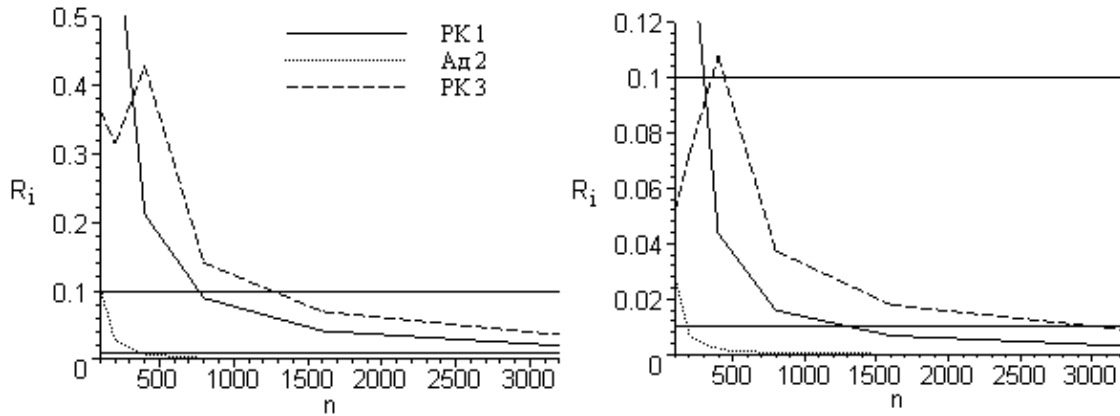


Рис. 6. Зависимость глобальной погрешности  $R_i$  для  $\gamma_L(\tau_0, \zeta)$  (слева) и  $\tau_L(\tau_0, \zeta)$  (справа) от количества точек дискретизации  $n$  на сетке  $w_\tau(200)$

В данном случае при рассмотрении сеток  $w_\tau$  с меньшим количеством узлов, чем 200, погрешности ведут себя также неоднородно, а при увеличении узлов поведение графиков практически не меняется для методов РК1 и Ад2, а для метода РК3 глобальная погрешность стабилизируется и постепенно уменьшается.

При вычислении максимума глобальной погрешности  $R$  по формуле (3) мы наблюдали следующий эффект. Погрешности методов РК1 и Ад2 всех вышеописанных зависимостей незначительно меняются в сторону увеличения, а погрешность РК3 сильно увеличивается и намного превышает даже РК1. Для проверки этого эффекта мы опробовали методы Рунге–Кутты второго и четвертого порядков и получали аналогичные результаты. Этот эффект также можно наблюдать явно на графиках фазовых портретов нескольких сгустков, т.к. для одного сгустка эффект наглядно не выражен. На рис. 7 представлены графики фазовых портретов шести сгустков в координатах  $(\tau_L, \gamma_L - \gamma_0)$ .

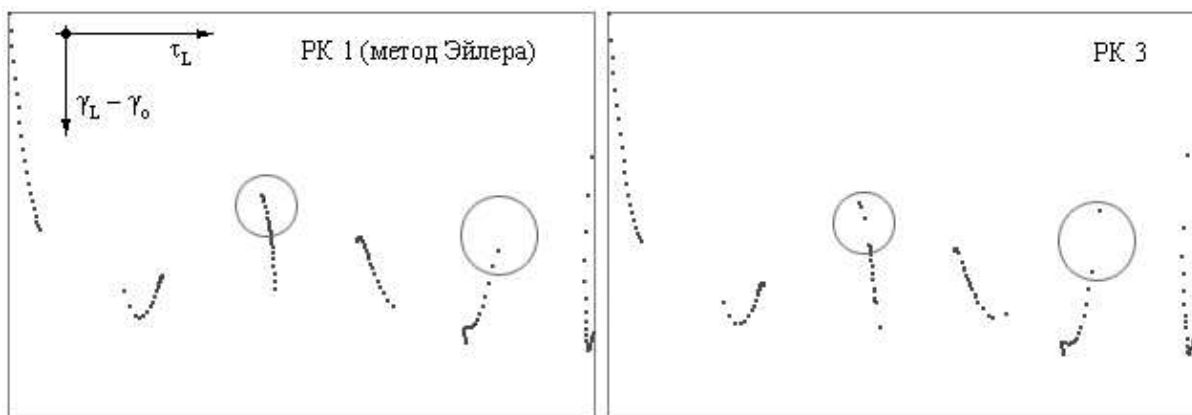


Рис. 7. Фазовый портрет шести сгустков при использовании метода РК1 (слева) и РК3 (справа); каждая точка графика обозначает частицу сгустка

На правом графике явно видна неоднородность распределения частиц сгустков, особенно на его концах. При максимально возможном для нас уменьшении шага вычисления по сетке  $w_\zeta$  эта неоднородность уменьшается, но при этом значительно увеличивается время вычислений. Тем самым можно сделать вывод о том, что мы столкнулись с ситуацией, описанной в [4], когда методы Рунге–Кутты высших порядков правильно описывают процессы лишь при сильном уменьшении шага вычисления, а это приводит к увеличению времени вычислений, что мы собственно и наблюдали. Если рассмотреть численные схемы Рунге–Кутты высших порядков с физической точки зрения, то на исследуемую частицу, летящую

в плазме с релятивистской скоростью, могут оказывать влияние те частицы, которые распространяются за ней, что физически просто невозможно, поскольку создаваемое ими кильватерное поле возбуждается позади рассматриваемой частицы. Вследствие этого можно говорить о неконсервативности численных схем Рунге–Кутты высших порядков.

На основании проделанных нами вычислений можно заключить следующее.

1. Методы Рунге–Кутты второго и более порядков аппроксимации при описании динамики сгустков в одномерной плазме являются неконсервативными.

2. Для наиболее быстрого вычисления с точностью  $1 \cdot 10^{-1}$  необходимо использовать метод прямоугольников при вычислении интегралов и метод Адамса второго порядка аппроксимации при решении дифференциальных уравнений на сетках  $w_\zeta(500)$  и  $w_\tau(200)$ .

3. Для наиболее быстрого вычисления с точностью  $1 \cdot 10^{-2}$  необходимо использовать метод прямоугольников при вычислении интегралов и метод Адамса второго порядка аппроксимации при решении дифференциальных уравнений на сетках  $w_\zeta(500)$  и  $w_\tau(1800)$ .

Все вычисления и выводы даны для  $z_{\max} = 20 \cdot \pi$  и  $\tau_* = \pi/3$ ; при их изменении необходимо воспользоваться формулами (4) и (5) для корректировки оценок.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Файнберг Я.Б., Балакирев В.А., Онищенко И.Н. Сидельников Г.Л., Сотников Г.В.* Возбуждение кильватерных полей в плазме последовательностью сгустков релятивистских электронов // *Физика плазмы*. 1994. **20**, № 7, 8. 674–681.
2. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта.* М.: Мир, 1979.
3. *Старовойтов А.С.* Моделирование динамики релятивистских электронных пучков в схемах кильватерного ускорения частиц в одномерной плазме (пакет программ) // Свидетельство о регистрации в Отраслевом фонде алгоритмов и программ от 13.11.2002, № 2171 (номер госуд. регистрации 50200200588).
4. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
5. *Березин А.К., Файнберг Я.Б., Киселев В.А., Линник А.Ф., Усков В.В., Балакирев В.А., Онищенко И.Н., Сидельников Г.Л., Сотников Г.В.* Возбуждение кильватерных полей в плазме импульсом релятивистских электронов, содержащим регулируемое количество коротких сгустков // *Физика плазмы*. 1994. **20**, № 7, 8. 663–670.

Поступила в редакцию  
16.05.2003

---