УДК 518.1

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАДРАТУР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА МНОГОУГОЛЬНИКАХ

**И. О. Арушанян**[1]

Предложен метод численного решения одного класса граничных интегральных уравнений плоской теории упругости на кривых, являющихся границами односвязных многоугольников. При некоторых ограничениях на геометрию области доказаны существование и единственность решений аппроксимирующих систем линейных алгебраических уравнений. Получены оценки устойчивости. В $C$-норме доказана экспоненциальная скорость сходимости метода. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02–01–00490) и научной программы “Университеты России” (проект УР.04.03.002).

**1. Постановка задачи**. Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma$, являющейся замкнутой кривой без самопересечений. Рассмотрим первую краевую задачу плоской теории упругости:

$$\begin{aligned} &\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad x=(x_1,x_2)\in\Omega,\\ &\vec{u} = \vec{F}, \quad x\in\Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{u} = (u_1(x),\ u_2(x))^T$ — неизвестная вектор-функция, $\lambda$, $\mu$ — постоянные Ламе и $\vec{F}$ — заданная кусочно-гладкая вектор-функция.

Решение задачи (1) будем искать в виде плоского потенциала двойного слоя второго рода [6]:

$$\vec{u} = \int\limits_\Gamma \big(T(\partial_y,\vec{n})\Gamma(y-x)\big)\vec{\Phi}(y)\,dl_y,$$

где $\Gamma(y-x)$ — матрица Буссинеска (фундаментальное решение задачи (1)) с элементами

$$\Gamma_{ij}(y-x) = \frac{\lambda+3\mu}{2\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left(\delta_i^j\ln|x-y| - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^2}\right).$$

Через $T(\partial_y,\vec{n})$ обозначен оператор псевдонапряжения

$$\big(T(\partial_y,\vec{n})\big)_{ij} = \mu\delta_i^j\frac{\partial}{\partial n_y} + (\lambda+\mu)n_i(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}\left(n_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i} - n_i(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Здесь $i,\,j=1,2$ и $\delta_i^j$ — символ Кронекера.

Тогда компоненты неизвестной функции $\vec{\Phi}$ являются решением системы интегральных уравнений

$$\vec{\Phi}(x) + \int\limits_\Gamma \big(T(\partial_y,\vec{n})\Gamma(y-x)\big)\vec{\Phi}(y)\,dl_y = 2\vec{F}(x). \tag{2}$$

Для численного решения системы (2) будем использовать метод квадратур, состоящий в замене интеграла в левой части квадратурной суммой и переходе к системе линейных алгебраических уравнений.

Если $\Gamma$ и $\vec{F}$ являются достаточно гладкими, то при решении системы (2) можно использовать известные результаты об интегральных уравнениях с гладкими ядрами [8, 9].

Рассмотрим случай, когда область $\Omega$ является плоским многоугольником. Пусть при некотором $J\geqslant 3$ имеем

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{J-1}\Gamma_j,$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, 119992, Москва; e-mail: arushan@mech.math.msu.su

где $\Gamma_j$ — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $P_j$ и $P_{j+1}$, считая $P_J = P_0$. Величину внутреннего угла области $\Omega$ при вершине $P_j$ обозначим через $\alpha_j$, причем $0 < \alpha_j < 2\pi$ для всех $j$.

В дальнейшем будем использовать следующее параметрическое представление кривой $\Gamma$:

$$\Gamma = \{x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)),\ s \in [0, T],\ x(0) = x(T)\},$$

считая, что $s$ — натуральный параметр (параметр длины).

Учитывая сделанную параметризацию границы $\Gamma$, обозначим

$$\vec{\varphi} = \vec{\Phi}\big(x(s)\big), \quad \vec{f}(s) = 2\vec{F}\big(x(s)\big),$$
$$K(s,t) = T(\partial_x, \vec{n})\Gamma\big(x(t) - x(s)\big).$$

Пусть $\{s_j\}$, $j = 1, \ldots, J$, есть набор точек, однозначно определяемый соотношениями

$$\alpha(s_j) = P_j, \quad j = 1, \ldots, J, \quad 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{J-1} < s_J = T.$$

Если $t$ есть внутренняя точка отрезка $[s_j, s_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, J-1$, то функция $K(s,t)$ при всех $s \in [0, T]$ определяется при $t \neq s$ по формуле

$$K_{kl}(s,t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{x_1'(t)\big(x_2(s) - x_2(t)\big) - x_2'(t)\big(x_1(s) - x_1(t)\big)}{\big(x_1(s) - x_1(t)\big)^2 + \big(x_2(s) - x_2(t)\big)^2}\left(a\delta_k^l + b\,\frac{\big(x_k(s) - x_k(t)\big)\big(x_l(s) - x_l(t)\big)}{\big(x_1(s) - x_1(t)\big)^2 + \big(x_2(s) - x_2(t)\big)^2}\right),$$

а при $t = s$ — по формуле

$$K_{kl}(s,t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t)}{\big(x_1'(t)\big)^2 + \big(x_2'(t)\big)^2}\left(a\delta_k^l + b\,\frac{x_k'(t)x_l'(t)}{\big(x_1'(t)\big)^2 + \big(x_2'(t)\big)^2}\right).$$

Здесь

$$a = \frac{2\mu}{\pi(\lambda + 3\mu)}, \quad b = \frac{2(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 3\mu)}, \quad k, l = 1, 2\,.$$

Учитывая, что при $s \in [0, T] \setminus \bigcup_{j=0}^{J}\{s_j\}$ выполнено

$$\int\limits_0^T K(s,t)\,dt = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv E,$$

система (2) может быть записана [3] в виде

$$2\vec{\varphi}(s) + \int\limits_0^T K(s,t)\big(\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(s)\big)\,dt = \vec{f}(s), \quad s \in [0, T], \tag{3}$$

причем соотношение (3) выполнено и в случае, когда $x(s)$ является угловой точкой границы $\Gamma$ (в то время как (2) в этих точках не определено).

Рассмотрим далее предлагаемый способ численного решения системы (3) методом квадратур.

**2. Асимптотика решения вблизи угловых точек**. Исследуем вопрос об асимптотическом поведении системы интегральных уравнений (2) (а следовательно, и системы (3)) вблизи вершины $P_j$ при произвольном $j = 0, \ldots, J-1$.

Не ограничивая общности будем считать, что вблизи точки $P_j$ область $\Omega$ совпадает с сектором

$$\{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 + ix_2 = re^{i\theta},\ 0 \leqslant r \leqslant \delta,\ -0.5\alpha_j \leqslant \theta \leqslant 0.5\alpha_j\}\,.$$

Наряду с (1) рассмотрим две вспомогательные задачи:

$$\begin{aligned} &\mu\Delta\vec{v} + (\lambda + \mu)\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \\ &\vec{v} = \vec{F}, \quad x \in \Gamma; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\mu\Delta\vec{\omega} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\vec{\omega} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \\ &T(\partial_x, \vec{n})\vec{\omega} = T(\partial_x, \vec{n})\vec{u} - T(\partial_x, \vec{n})\vec{v}, \quad x \in \Gamma, \\ &\vec{\omega}(x) \to 0, \quad x \to \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Из общего результата [6] следует выражение решения системы (2) через значения решений задач (4) и (5):

$$\vec{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\vec{\omega} - \vec{v}(\infty)\right)\Big|_{\Gamma}.$$

Для упрощения выкладок будем считать, что компоненты $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции $\vec{F}(x)$ являются сужениями на $\Gamma$ некоторых дважды непрерывно дифференцируемых в области $G \supset \bar{\Omega}$ функций.

Рассмотрим вначале случай, когда $0 < \alpha_j < \pi$. Тогда в полярной системе координат решения задач (1) и (4) имеют вблизи точки $P_j$ следующие асимптотические представления [4, 6]:

$$\begin{aligned} &\vec{u}(x) = \vec{F}(P_j) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1}(P_j)x_1 + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_2}(P_j)x_2 + O\left(r^{1+\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \\ &x = (r, \theta) \in \Omega, \quad r \to 0; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\vec{v}(x) = \vec{F}(P_j) + c_1 r^{\bar{\beta}_j}\vec{e}_r + c_2 r^{\bar{\beta}_j}\vec{e}_\theta + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1}(P_j)x_1 + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_2}(P_j)x_2 + O\left(r^{1+\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \\ &x = (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \quad r \to 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\bar{\beta}_j$ — корень трансцендентного уравнения

$$\left((3-4\nu)\sin 2\beta(\pi - 0.5\alpha_j)\right)^2 = \left(\beta \sin 2(\pi - 0.5\alpha_j)\right)^2, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{8}$$

с наименьшей положительной вещественной частью.

Соотношения (6) и (7) можно почленно дифференцировать, что дает возможность получить асимптотику значений оператора псевдонапряжений $T(\partial_x, \vec{x})\vec{\omega}(x)$ при $x \in \Gamma \setminus \{P_j\}$, $r \to 0$. Кроме этого, на асимптотику решения задачи (5) могут повлиять нетривиальные решения этой же задачи с тождественно равной нулю правой частью в окрестности точки $P_j$.

Следуя известному методу [7], рассмотрим на клине

$$\Omega_j = \left\{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 + ix_2 = re^{i\theta},\ r \geqslant 0,\ -0.5\alpha_j \leqslant \theta \leqslant 0.5\alpha_j\right\}$$

вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} &\mu\Delta\vec{W}(x) + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\vec{W}(x) = 0, \quad x \in \Omega_j, \\ &T(\partial_x, \vec{n})\vec{W}\Big|_{\theta=\pm 0.5\alpha_j} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

В полярной системе координат задача (9) запишется в виде системы Ламе

$$\begin{aligned} &(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_r}{r}\right) - \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{r}\right) = 0, \\ &(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_r}{r}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{r}\right) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

для $-0.5\alpha_j < \theta < 0.5\alpha_j$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} &(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_r}{r}\right) + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{W_r}{r} - \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)\frac{\partial W_r}{\partial r}\right) = 0, \\ &\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{W_\theta}{r} + \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)\frac{\partial W_\theta}{\partial r}\right) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

при $\theta = \pm 0.5\alpha_j$.

Функцию $\vec{W} = (W_r, W_\theta)$ будем искать в виде

$$W_r = r^\beta \psi(\theta), \quad W_\theta = r^\beta \chi(\theta).$$

Подставляя эти выражения в (10), получим [7]

$$\psi(\theta) = A\cos\bigl((1+\beta)\theta\bigr) + B\sin\bigl((1+\beta)\theta\bigr) + C\cos\bigl((1-\beta)\theta\bigr) + D\sin\bigl((1-\beta)\theta\bigr),$$
$$\chi(\theta) = B\cos\bigl((1+\beta)\theta\bigr) - A\sin\bigl((1+\beta)\theta\bigr)\,\frac{(\lambda+3\mu)+\beta(\lambda+\mu)}{(\lambda+3\mu)-\beta(\lambda+\mu)}\bigl(D\cos\bigl((1-\beta)\theta\bigr) - C\sin\bigl((1-\beta)\theta\bigr)\bigr),$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — произвольные постоянные.

Подставив эти представления в (11) и выполнив соответствующие преобразования, получим систему из четырех уравнений относительно неизвестных $A$, $B$, $C$, $D$:

$$\begin{aligned}
&A\cos\bigl((1+\beta)0.5\alpha_j\bigr) - \frac{(\lambda+3\mu)+\beta(\lambda+\mu)}{(\lambda+3\mu)-\beta(\lambda+\mu)}\,C\cos\bigl((1-\beta)0.5\alpha_j\bigr) = 0,\\
&A\sin\bigl((1+\beta)0.5\alpha_j\bigr) - C\sin\bigl((1-\beta)0.5\alpha_j\bigr) = 0,\\
&B\sin\bigl((1+\beta)0.5\alpha_j\bigr) - \frac{(\lambda+3\mu)+\beta(\lambda+\mu)}{(\lambda+3\mu)-\beta(\lambda+\mu)}\,D\sin\bigl((1-\beta)0.5\alpha_j\bigr) = 0,\\
&B\cos\bigl((1+\beta)0.5\alpha_j\bigr) - D\cos\bigl((1-\beta)0.5\alpha_j\bigr) = 0.
\end{aligned}$$

Требование существования нетривиальных решений вспомогательной задачи (9) равносильно равенству нулю определителя этой системы. Отсюда получаем уравнение относительно $\beta$, совпадающее с (8).

Проведя аналогичные построения для случая $\pi < \alpha_j < 2\pi$, получим следующий результат: при $x = x(r,\theta) \in \Gamma$, $r \to 0$ имеет место соотношение

$$\vec{\Phi}(x) - \vec{\Phi}(P_j) = \omega_1(\theta) r^{\beta_j}\vec{e}_r + \omega_2(\theta) r^{\beta_j}\vec{e}_\theta + O\left(r^{\beta_j+\varepsilon}\right),$$

где $\omega_1$, $\omega_2$ — гладкие функции, а $\beta_j$ — корень уравнения

$$\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\sin\beta\bigl(\pi + |\pi-\alpha_j|\bigr)\right)^2 = \bigl(\beta\sin\bigl(\pi+|\pi-\alpha_j|\bigr)\bigr)^2$$

с наименьшей положительной вещественной частью. Заметим, что корень $\beta_j$ удовлетворяет неравенству $0.5 < \beta_j < 1$.

**3. Построение аппроксимирующей линейной системы**. Известно, что если компоненты $f_1$ и $f_2$ функции $\vec{f}$ являются непрерывными $T$-периодическими функциями, то система (3) имеет единственное решение $\vec{\varphi}$ с компонентами из $C([0,T])$, причем $\vec{\varphi}(0) = \vec{\varphi}(T)$.

В дальнейшем будем предполагать, что функции $f_1$ и $f_2$ имеют производные любого порядка в каждой точке $s \in (s_j, s_{j+1})$, $j = 0,\ldots,J$, причем

$$\left|\frac{d^n f_k(s)}{ds^n}\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot\left(\sum_{i=0}^{1}\frac{n!}{\bigl|x(s)-x(s_{j+i})\bigr|^{n-\theta}}\right), \tag{12}$$

где $k = 1,2$, $n = 1,2,\ldots$, $0 < \theta \leqslant 1$, а постоянная не зависит от $n$ и $s$.

Тогда для любого набора чисел $\vec{\lambda} = (\lambda_0,\ldots,\lambda_J)$, таких, что

$$0 < \lambda_j < \min\{\theta,\, \beta_j\},\quad j = 0,\ldots,J,$$

существует такая постоянная $c(\Gamma,\vec{f},\vec{\lambda})$, зависящая только от вида кривой $\Gamma$, функции $\vec{f}$ и набора $\vec{\lambda}$, что для решения $\vec{\varphi}$ системы (3) при всех $j$ для каждого $s \in [0,T]$ выполнено

$$\max_{k=1,2}\bigl|\varphi_k(s) - \varphi_k(s_j)\bigr| \leqslant c\,(\Gamma,\vec{f},\vec{\lambda})\cdot\bigl|x(s)-x(s_j)\bigr|^{\lambda_j}.$$

Введем обозначение

$$s_{j+1/2} = s_j + \frac{s_{j+1}-s_j}{2},\quad j = 0,\ldots,J-1.$$

**Теорема 1**. *При сделанных ограничениях на правую часть системы* (3) *для каждого* $j = 0,\ldots,J-1$ *существует число* $n_0 > 0$, *при котором для всякого натурального* $N_j > n_0$ *может быть построена такая квадратурная формула с* $n = n(N_j)$ *узлами*

$$S_{j,N_j}(s,\vec{\varphi}) = \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}^{(n)} K\bigl(s, t_{j,i}^{(n)}\bigr)\left(\vec{\varphi}(t_{j,i}^{(n)}) - \vec{\varphi}(s)\right), \tag{13}$$

*что если $\vec{\varphi}$ является решением системы* (3), *то*

$$\max_{s\in[0,T]}\left\| \int\limits_{s_j}^{s_{j+1/2}} K(s,t)\big(\vec{\varphi}(t)-\vec{\varphi}(s)\big)\,dt - S_{j,N_j}(s,\vec{\varphi})\right\| \leqslant b_j\cdot\exp\left(-c_j\sqrt{n}\right), \tag{14}$$

*где* $c_{j,1}N_j^2\leqslant n\leqslant c_{j,2}N_j^2$, *а постоянные* $b_j$, $c_j$, $c_{j,1}$, $c_{j,2}$ *строго положительны и не зависят от выбора* $N_j$.

**Доказательство**. Функция $\vec{\varphi}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\vec{\varphi}(s)+\vec{\varphi}(s_j) = -\int\limits_0^T K(s,t)\big(\vec{\varphi}(t)-\vec{\varphi}(s)\big)\,dt + \vec{f}(s),\quad s\in(s_j,s_{j+1/2}).$$

Следуя [1], продифференцируем по $s$ правую часть этого соотношения нужное число раз. Тогда при каждом $\lambda_j\in(0,\min\{\theta,\beta_j\})$, $j=0,\ldots,J$, получим следующую оценку:

$$\left\|\frac{d^p\vec{\varphi}(s)}{ds^p}\right\|_\infty \leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{(p+1)!}{\big(d_j\,|x(s)-x(s_j)|\big)^{p-\lambda_j}},\quad p=1,2,\ldots,$$
$$d_j=\begin{cases}\sqrt{1-\cos\alpha_j}, & \alpha_j\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right),\\[2mm] \quad 1\quad, & \alpha_j\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\bigcup\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right].\end{cases} \tag{15}$$

Здесь постоянная не зависит от $s$ и $p$.

Пусть $N_j$ — некоторое положительное целое число. Построим разбиение отрезка $[s_j,s_{j+1/2}]$ такими $N_j+1$ точками

$$s_j<t_{N_j}<\ldots<t_1<t_0=s_{j+1/2},$$

что

$$t_k=s_j+(s_{j+1/2}-s_j)\,(1+\theta_j)^{-1},\quad k=0,1,\ldots,N_j,$$
$$\theta_j=\begin{cases}|\sin\alpha_j|, & \alpha_j\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right),\\[2mm] \quad 1\quad, & \alpha_j\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\bigcup\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right].\end{cases}$$

При всех $s\in[0,T]$ имеет место неравенство

$$\left\|\int\limits_{s_j}^{t_{N_j}} K(s,t)\big(\vec{\varphi}(t)-\vec{\varphi}(s)\big)\,dt\right\|_\infty \leqslant \mathrm{const}\cdot(1+\theta_j)^{-\lambda_j N_j}.$$

На каждом отрезке $[t_k,t_{k-1}]$, $k=1,\ldots,N_j$, построим квадратуру Гаусса по $n_{j,k}$ узлам:

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} K(s,t)\big(\vec{\varphi}(t)-\vec{\varphi}(s)\big)\,dt = \sum_{i=1}^{n_{j,k}} A_{j,k,i}K(s,t_{j,k,i})\big(\vec{\varphi}(t_{j,k,i})-\vec{\varphi}(s)\big)+\vec{R}_{j,k}(s,\vec{\varphi}).$$

Значения $n_{j,k}$ будем выбирать таким образом, чтобы выполнялась оценка

$$\sum_{k=1}^{N_j}\max_{s\in[0,T]}\big\|\vec{R}_{j,k}(s,\vec{\varphi})\big\|_\infty \leqslant \mathrm{const}\cdot(1+\theta_j)^{-\lambda_j N_j}.$$

Для этого при каждом $k$ оценим величину погрешности через число узлов $n_{j,k}$.

Сначала будем считать, что при любом $s\in[s_j,s_{j+1/2}]$ ближайшая к $x(s)$ точка кривой $\Gamma$, не лежащая на $\Gamma_j$, находится на $\Gamma_{j-1}$ (полагая $\Gamma_{-1}=\Gamma_{J-1}$). В этом случае можно показать, что при всех $s\in[0,T]$ каждая из функций $K_{m,l}(s,t)$, $m,l=1,2$, допускает аналитическое продолжение $\hat{K}_{m,l}(s,z)$ с отрезка

$[t_k, t_{k-1}]$ вещественной оси в круг $M_{t_{k,0}}$ на комплексной плоскости с центром в точке $t_{k,0} = (t_k + t_{k-1})/2$ вещественной оси и радиусом

$$r_k = \frac{1}{2}\left(s_{j+1/2} - s_j\right)\left(1 - (1+\theta_j)^{-1}(1+\theta_j)^{2-k}\right),$$

причем

$$\max_{s\in[0,T]}\max_{z\in M_{t_{k,0}}}\max_{m,l=1,2}\left|\hat{K}_{m,l}(s,z)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot(1+\theta_j)^k,$$

где постоянная не зависит от $k$.

Функции $\varphi_l(t) - \varphi_l(s_j)$, $l = 1, 2$, допускают аналитические продолжения $\hat{\varphi}_l(z)$ в тот же круг по формулам

$$\hat{\varphi}_l(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z-t_{k,0})^m}{m!}\left(\frac{d^m(\varphi_l(t) - \varphi_l(s_j))}{dt^m}\right)\Bigg|_{t=t_{k,0}}.$$

Абсолютная сходимость каждого из этих рядов обеспечивается оценкой (15), причем

$$\max_{l=1,2}\max_{z\in M_{t_{k,0}}}\left|\hat{\varphi}_l(z)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot(1+\theta_j)^{-\lambda_j k}.$$

Положив

$$\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(s) = \vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(s_j) + \vec{\varphi}(s_j) - \vec{\varphi}(s),$$

получим следующий результат: при всех $m, l = 1, 2$ функции $K_{m,l}(s,t)(\vec{\varphi}_l(t) - \vec{\varphi}_l(s))$ допускают при каждом $s \in [0, T]$ аналитические продолжения с отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ в эллипс $Э_k$, расположенный на комплексной плоскости с фокусами в точках $(t_k, 0)$ и $(t_{k-1}, 0)$ и проходящий через точку $(t_{k,0} - r_k, 0)$, причем это продолжение ограничено величиной $O\left((1+\theta_j)^{k(1-\lambda_j)}\right)$. Данная оценка является равномерной по $s$ и $k$.

Отображение

$$\bar{z} = \frac{2z - (t_{k-1} + t_k)}{t_{k-1} - t_k}$$

переводит эллипс $Э_k$ в эллипс с фокусами в точках $(\pm 1, 0)$ и суммой полуосей

$$Q = 1 + \theta_j + \sqrt{\theta_j(2+\theta_j)} > \frac{1 + \theta_j(1+\theta_j)^{-1}}{1 - \theta_j(1-\theta_j)^{-1}} > \exp\left(2\theta_j(1+\theta_j)^{-1}\right).$$

Используя известный результат из [2], получим оценку для величины погрешности:

$$\max_{s\in[0,T]}\left\|\vec{R}_{j,k}(s,\vec{\varphi})\right\|_\infty \leqslant \mathrm{const}\cdot\left((1+\theta_j)^{-\lambda_j k}\right)\exp\left(-4n_{j,k}\theta_j(1+\theta_j)^{-1}\right). \qquad (16)$$

Для выполнения неравенства (16) достаточно выбрать числа $n_{j,k}$ такими, чтобы

$$(1+\theta_j)^{-\lambda_j k}\exp\left(-4n_{j,k}\theta_j(1+\theta_j)^{-1}\right) \leqslant N_j^{-1}(1+\theta_j)^{-\lambda_j N_j}.$$

Например, можно положить

$$n_{j,k} = \left[\frac{\lambda_j(N_j - k)\ln(1+\theta_j) + \ln N_j}{4\theta_j(1+\theta_j)^{-1}}\right] + 1,$$

где через $[\,\cdot\,]$ обозначена целая часть соответствующего числа.

Выполним эти построения на всех отрезках $[t_k, t_k - 1]$, $k = 1, \ldots, N_j$, и получим составную квадратурную формулу (13) с общим числом узлов

$$n = n(N_j) = \sum_{k=1}^{N_j} n_{j,k} \leqslant \left[\frac{\lambda_j N_j^2\ln(1+\theta_j) + N_j\left(2\ln N_j - \lambda_j\ln(1+\theta_j)\right)}{8\theta_j(1+\theta_j)^{-1}}\right] + N_j.$$

При этом если функция $\vec{\varphi}$ является решением системы (3), то имеет место оценка

$$\max_{s\in[0,T]}\left\|\int\limits_{s_j}^{s_{j+1/2}} K(s,t)\left(\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(s)\right)dt - S_{j,N_j}(s,\vec{\varphi})\right\|_\infty \leqslant \mathrm{const}\cdot\exp\left(-C_{N_j}\sqrt{n}\right),$$

где

$$C_{N_j} = 2\sqrt{\frac{\lambda_j\theta_j\ln(1+\theta_j)}{1+\theta_j}} + O\left(N_j^{-1}\right).$$

Теперь перейдем к случаю, когда существует такое $s \in [s_j, s_{j+1/2}]$, что ближайшая к $x(s)$ точка кривой $\Gamma$ лежит на $\Gamma \setminus \{\Gamma_{j-1} \bigcup \Gamma_j\}$. Рассмотрим при всех $k-1,\ldots,N_j$ величины

$$\sigma_{j,k} = \min_{x\in\Gamma\setminus\Gamma_j}\ \min_{z\in[t_k,t_{k-1}]}\bigl|x(s)-x\bigr|.$$

При достаточно больших $N_j$ существует такое число $k_j$, определяемое только видом кривой $\Gamma$, что при всех $k > k_j$ величина $\sigma_{j,k}$ достигается, когда $x \in \Gamma_{j-1}$. Тогда при $k > k_j$ все построения, проведенные выше на отрезках $[t_k, t_{k-1}]$, остаются без изменений. Если же $k < k_j$, то на этих отрезках будем строить квадратуры Гаусса с другим числом $n'_{j,k}$ узлов (вообще говоря, большим $n_{j,k}$), учитывая, что функции $K_{m,l}(s,t)$ при $m$, $l=1,2$ и всех $s$ допускают ограниченные аналитические продолжения с отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ в эллипс с суммой полуосей, меньшей чем у $\text{Э}_k$.

Для каждого $n'_{j,k}$ выполняется неравенство

$$C_{j,1}^{(k)}N_j \leqslant n'_{j,k} \leqslant C_{j,2}^{(k)}N_j,$$

где постоянные $C_{j,1}^{(k)}$, $C_{j,2}^{(k)} > 0$ и не зависят от $N_j$. Поэтому оценка (14) остается в силе. Теорема 1 доказана.

**Следствие.** *Для коэффициентов и узлов квадратурной формулы* (13) *выполнено*

$$\max_{s\in[0,T]}\left\| \int\limits_{t_{N_j}}^{s_{j+1/2}} K(s,t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}^{(n)} K\bigl(s, t_{j,i}^{(n)}\bigr)\right\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

**Доказательство.** Из (16) при всех $k=1,\ldots,N_j$ следует оценка

$$R_k = \max_{s\in[0,T]}\left\| \int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} K(s,t)\,dt - \sum_{i=1}^{n_{j,k}} A_{j,k,i}K(s,t_{j,k,i})\right\|_\infty \leqslant \mathrm{const}\cdot\exp\left(-4n_{j,k}\theta_j(1+\theta_j)^{-1}\right).$$

Выбор чисел $n_{j,k}$, сделанный при доказательстве теоремы 1, обеспечивает выполнение соотношения

$$\sum_{k=1}^{N_j} R_k \leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{1}{N_j},$$

что и доказывает следствие.

Точно таким же способом при достаточно большом $N_{j+1}$ может быть построена квадратурная формула с $n = n(N_{j+1})$ узлами и с оценкой погрешности $O(\exp(-C_{j+1}\sqrt{n}))$ для приближенного вычисления интеграла на отрезке $[s_{j+1/2}, s_{j+1}]$.

**Теорема 2.** *Если компоненты функции $\vec{f}$ удовлетворяют условиям* (12), *то существует такое число $M>0$, что при всех целых $N>M$ можно построить квадратурную формулу*

$$S_N(s,\vec\varphi) = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(N)} K\bigl(s, t_j^{(N)}\bigr)\left(\vec\varphi(t_j^{(N)}) - \vec\varphi(s)\right),$$

*для которой в случае, если $\vec\varphi$ является решением системы* (3), *выполнено*

$$\max_{s\in[0,T]}\left\|\int\limits_0^T K(s,t)\bigl(\vec\varphi(t)-\vec\varphi(s)\bigr)\,dt - S_N(s,\vec\varphi)\right\|_\infty \leqslant b\cdot\exp(-c\sqrt{n}),$$

*где $c_1N^2 \leqslant n \leqslant c_2N^2$, а постоянные $b$, $c$, $c_1$, $c_2$ строго положительны и не зависят от выбора $N$.*

**Доказательство.** Выберем некоторое число $N > 0$ и определим набор целых чисел $\{N_j\}$, $j = 0, \dots, J$, следующим образом:

$$(1+\theta_j)^{-\lambda_j N_j} \leqslant \max_{j=0,\dots,J-1} (1+\theta_m)^{-\lambda_m N} \leqslant (1+\theta_j)^{-\lambda_j (N_j-1)}.$$

На каждом из отрезков $[s_j, s_{j+1/2}]$ и $[s_{j+1/2}, s_{j+1}]$, $j = 0, \dots, J-1$, построим предложенные при доказательстве теоремы 1 квадратуры с $n_j(N_j)$ и $n_{j+1}(N_{j+1})$ узлами соответственно. Полученная составная квадратурная формула будет удовлетворять условиям теоремы 2. Таким образом, теорема доказана.

Построим теперь систему линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующую на решении систему (3). Для этого систему (3) запишем в операторной форме

$$\vec{\varphi} + K\vec{\varphi} = \vec{f},$$

где через $K$ обозначен линейный ограниченный оператор на пространстве $T$-периодических непрерывных вектор-функций:

$$(K\,\vec{v})(s) = \vec{v}(s) + \int\limits_0^T K(s,t)\big(\vec{v}(t) - \vec{v}(s)\big)\,dt.$$

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $K_N$:

$$(K_N\,\vec{v})\,(s) = \vec{v}(s) + S_N(s, \vec{\varphi}).$$

Из теоремы 2 следует, что

$$\big\|(K - K_N)\vec{\varphi}\big\|_C \leqslant b \cdot \exp(-c\sqrt{n}),$$

где

$$\|\vec{v}\|_C = \max_{s\in[0,T]} \|\vec{v}(s)\|_\infty .$$

Пусть вектор-функция $\vec{\varphi}^{(N)}$ является решением линейного уравнения

$$\vec{\varphi}^{(N)}(s) + K_N\,\vec{\varphi}^{(N)}(s) = \vec{f}(s), \quad s \in [0,T]. \tag{17}$$

Решение уравнения (17) сводится к решению линейной системы

$$\begin{aligned} &2\Phi_{1,i}^{(N)} + \sum_{j=1}^n A_j^{(N)} \left( \sum_{m=1}^2 K_{1,m}\big(t_i^{(N)}, t_j^{(N)}\big)\big(\Phi_{m,j}^{(N)} - \Phi_{m,i}^{(N)}\big) \right) = f_1\big(t_i^{(N)}\big),\\ &2\Phi_{2,i}^{(N)} + \sum_{j=1}^n A_j^{(N)} \left( \sum_{m=1}^2 K_{2,m}\big(t_i^{(N)}, t_j^{(N)}\big)\big(\Phi_{m,j}^{(N)} - \Phi_{m,i}^{(N)}\big) \right) = f_2\big(t_i^{(N)}\big). \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $i = 1, \dots, n$.

Действительно, для любого решения $\vec{\varphi}^{(N)} = \big(\varphi_1^{(N)}, \varphi_2^{(N)}\big)$ уравнения (17) величины $\Phi_{m,i}^{(N)} = \varphi_m^{(N)}\big(t_i^{(N)}\big)$, $m = 1,2$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют системе (18), и наоборот, если дано решение $\Phi_{m,i}^{(N)}$, $m = 1,2$, $i = 1, \dots, n$, системы (18), то функция $\vec{\varphi}^{(N)}(s) = \big(\varphi_1^{(N)}(s), \varphi_2^{(N)}(s)\big)$, определенная в каждой точке $s \in [0,T]$ как решение линейной системы из двух уравнений

$$\begin{aligned} &\left(2 - \sum_{j=1}^n A_j^{(N)} K_{1,1}\big(s, t_j^{(N)}\big)\right)\varphi_1^{(N)}(s) - \left(\sum_{j=1}^n A_j^{(N)} K_{1,2}\big(s, t_j^{(N)}\big)\right)\varphi_2^{(N)}(s) =\\ &\qquad = f_1(s) - \sum_{j=1}^n A_j^{(N)} \left( \sum_{m=1}^2 K_{1,m}\big(t_i^{(N)}, t_j^{(N)}\big)\Phi_{m,j}^{(N)} \right),\\ &-\left(\sum_{j=1}^n A_j^{(N)} K_{2,1}\big(s, t_j^{(N)}\big)\right)\varphi_1^{(N)}(s) + \left(2 - \sum_{j=1}^n A_j^{(N)} K_{2,2}\big(s, t_j^{(N)}\big)\right)\varphi_2^{(N)}(s) =\\ &\qquad = f_2(s) - \textstyle\sum_{j=1}^n A_j^{(N)} \left( \sum_{m=1}^2 K_{2,m}\big(t_i^{(n)}, t_j^{(n)}\big)\Phi_{m,j}^{(N)} \right), \end{aligned} \tag{19}$$

удовлетворяет уравнению (17).

**Замечание.** Следствие из теоремы 1 обеспечивает существование такого числа $r > 0$, что при всех $N$, больших некоторого $M_0$, и при всех $s \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$2 - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(N)} K_{m,m}\big(s, t_j^{(N)}\big) - \left| \sum_{j=1}^{n} A_j^{(N)} K_{m,l}\big(s, t_j^{(N)}\big) \right| \geqslant r,$$

где $l = 2$ при $m = 1$ и $l = 1$ при $m = 2$. Это неравенство обеспечивает однозначную разрешимость системы (19).

**4. Сходимость метода квадратур.** Для доказательства однозначной разрешимости уравнения (17) достаточно показать существование и ограниченность оператора $(I + K_N)^{-1}$. Доказательство осложнено тем, что в отличие от случая, когда кривая $\Gamma$ является гладкой, нет сходимости по норме последовательности операторов $\{(I + K_N)\}$ к оператору $(I + K)$.

Пусть $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{2J-1})$ — некоторый вектор, причем

$$0 \leqslant \gamma_i \leqslant \min_{j=0,\ldots,J-1} \frac{s_{j+1} - s_j}{2}.$$

Обозначим

$$\Gamma_j = \bigcup_{j=0}^{J-1} \big([s_j, s_j + \gamma_{2j}] \cup [s_{j+1} - \gamma_{2j+1}, s_{j+1}]\big).$$

Введем следующие векторы:

$$\vec{\varepsilon}(N) = \big(\varepsilon_0(N), \ldots, \varepsilon_{2J-1}(N)\big), \quad \vec{\rho}(N) = \big(\rho_0(N), \ldots, \rho_{2J-1}(N)\big),$$

где $(j = 0, \ldots, J-1)$

$$\varepsilon_{2j}(N) = (s_{j+1/2} - s_j)(1 + \theta_j)^{-\lambda_j N_j}, \qquad \rho_{2j}(N) = (s_{j+1/2} - s_j)(1 + \theta_j)^{-\lambda_j [N_j/2]},$$
$$\varepsilon_{2j+1}(N) = (s_{j+1} - s_{j+1/2})(1 + \theta_{j+1})^{-\lambda_{j+1} N_{j+1}}, \quad \rho_{2j+1}(N) = (s_{j+1} - s_{j+1/2})(1 + \theta_{j+1})^{-\lambda_{j+1}[N_{j+1}/2]}.$$

Здесь $N$ и набор чисел $\{N_j\}$ определены при доказательстве теоремы 2.

В этих обозначениях выпишем следствие из теоремы 2:

$$\max_{s \in [0,T]} \left\| \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma(\vec{\varepsilon}(N))} K(s,t)\, dt - \sum_{j=1}^{N} A_j^{(N)} K\big(s, t_j^{(N)}\big) \right\|_\infty = O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{20}$$

которое можно вывести, обобщив следствие из теоремы 1.

Обозначим

$$\hat{\alpha}_j = \begin{cases} \alpha_j, & 0 < \alpha_j \leqslant \pi, \\ 2\pi - \alpha_j, & \pi < \alpha_j \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

В дальнейшем будем считать, что при всех $j = 0, \ldots, J-1$ справедливы неравенства

$$\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \left( \frac{\sin 2\hat{\alpha}_j}{2} + \sin^2 \hat{\alpha}_j \right) < \hat{\alpha}_j. \tag{21}$$

**Лемма 1.** *Если выполнены неравенства* (21), *то существуют числа* $M > 0$ *и* $0 < q < 1$, *такие, что при всех* $N > M$ *может быть построен вектор* $\vec{\delta} = (\delta_0, \ldots, \delta_{2J-1})$, *компоненты которого удовлетворяют соотношениям*

$$\rho_j(N) \leqslant \delta_j, \quad j = 0, \ldots, 2J-1,$$
$$\delta_{2j} = \delta_{2j+1} \leqslant (s_{j+1} - s_j)/4, \quad j = 0, \ldots, J-1,$$

*и что выполнено неравенство*

$$\max_{l=1,2} \max_{s \in [0,T]} \int\limits_{\Gamma(\vec{\delta} + \vec{\varepsilon}(N))} \big(|K_{l,1}(s,t)| + |K_{l,2}(s,t)|\big)\, dt \leqslant q. \tag{22}$$

**Доказательство.** Для выполнения (22) достаточно потребовать, чтобы

$$\int\limits_0^{\pi-\alpha_j} \left|a + b\sin^2\varphi\right| d\varphi \ + \int\limits_0^{\pi-\alpha_j} \left|\frac{b}{2}\sin 2\varphi\right| d\varphi < 1,$$
$$\int\limits_0^{\pi-\alpha_j} \left|a + b\cos^2\varphi\right| d\varphi \ + \int\limits_0^{\pi-\alpha_j} \left|\frac{b}{2}\sin 2\varphi\right| d\varphi < 1,$$

где

$$a = \frac{2\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}, \quad b = \frac{2(\lambda+\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}, \quad j = 0,\ldots,J-1.$$

Условие (21), в свою очередь, является достаточным для выполнения каждого из этих неравенств. Лемма доказана.

Введем следующие линейные непрерывные операторы:

$$\left(K_{\vec{\rho}(N)}\,\vec{v}\right)(s) = \vec{v}(s) + \int\limits_{[0,T]\setminus\Gamma(\vec{\rho}(N))} K(s,t)\big(\vec{v}(t)-\vec{v}(s)\big)\,dt,$$
$$\left(K_{\vec{\rho}(N),N}\,\vec{v}\right)(s) = \vec{v}(s) + \sum_{t_j^{(N)}\in[0,T]\setminus\Gamma(\vec{\rho}(N))} A_j^{(N)} K\big(s,t_j^{(N)}\big)\left(\vec{v}(t_j^{(n)}) - \vec{v}(s)\right),$$
$$L_{\vec{\rho}(N)} = K_{\vec{\rho}(N)} + K_N - K_{\vec{\rho}(N),N}.$$

Рассмотрим срезающую функцию $\chi \in C([0,T])$, такую, что $\chi(s) \equiv 1$, когда $s \in \Gamma(\vec{\delta})$, и $\chi(s) \equiv 0$, когда $s \in [0,T]\setminus\Gamma(\vec{\delta}+\vec{\varepsilon}(N))$. Тогда оператор $L_{\vec{\rho}(N)}$ можно представить в виде

$$L_{\vec{\rho}(n)} = A_{\vec{\rho}(n)} + B,$$

где

$$\left(A_{\vec{\rho}(n)}\,\vec{v}\right)(s) = \left(1 - \int\limits_{[0,T]\setminus\Gamma(\vec{\rho}(N))} \big(1-\chi(t)\big)K(s,t)\,dt\right)\vec{v}(s) + \int\limits_{[0,T]\setminus\Gamma(\vec{\rho}(N))} \chi(t)K(s,t)\left(\vec{v}(t)-\vec{v}(s)\right)dt +$$
$$+ \sum_{t_j^{(N)}\in\Gamma(\vec{\rho}(N))} A_j^{(N)} K\big(s,t_j^{(N)}\big)\left(\vec{v}(t_j^{(N)}) - \vec{v}(s)\right),$$
$$\left(B\,\vec{v}\right)(s) = \int\limits_{[0,T]\setminus\Gamma(\vec{\delta})} \big(1-\chi(t)\big)K(s,t)\vec{v}(t)\,dt.$$

**Лемма 2.** *Существует такое число $M > 0$, что при всех $N > M$ операторы*

$$\left(I + A_{\vec{\rho}(N)}\right)^{-1}$$

*существуют и ограничены.*

**Доказательство.** Пусть $s = s_j$ при некотором $j = 0,\ldots,J$. Тогда для любой функции $\vec{v} \in C([0,T])$ выполняется неравенство

$$\left|\left(A_{\vec{\rho}(N)}\,\vec{v}\right)(s_j)\right| \leqslant \left|\left(1 - \int\limits_{[0,T]\setminus\Gamma(\vec{\delta})} K(s,t)\,dt + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\vec{v}(s_j)\right| \leqslant \left(q_1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\|\vec{v}\|_C$$

при некотором $0 < q_1 < 1$.

Если $s \neq s_j$ ни при каком $j = 0,\ldots,J$, то

$$\left|\left(A_{\vec{\rho}(N)}\,\vec{v}\right)(s)\right| \leqslant \left(q + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\|\vec{v}\|_C,$$

где $q$ берется из неравенства леммы 1.

Следовательно, существует такое число $0 \leqslant q_2 < 1$, что при достаточно больших $N$

$$\left\| A_{\vec{\rho}(N)} \right\|_C \leqslant q_2 < 1.$$

Поэтому $\left(I + A_{\vec{\rho}(N)}\right)$ имеет непрерывный обратный оператор. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Последовательность операторов $\{A_{\vec{\rho}(N)}\}$ сходится поточечно на пространстве $T$-периодических непрерывных функций к линейному оператору $A$ при $N \to \infty$:*

$$(A\,\vec{v})\,(s) = \left(1 - \int\limits_0^T \bigl(1 - \chi(t)\bigr) K(s,t)\,dt\right)\vec{v}(s) + \int\limits_0^T \chi(t) K(s,t)\bigl(\vec{v}(t) - \vec{v}(s)\bigr)\,dt,$$

*причем оператор $(I + A)^{-1}$ существует и ограничен.*

**Доказательство.** Поточечная сходимость последовательности $\{A_{\vec{\rho}(N)}\}$ к оператору $A$ при $N \to \infty$ следует [9] из свойств ядра $K(s,t)$ и соотношения

$$\int\limits_{\Gamma(\vec{\rho}(N))\setminus\Gamma(\vec{\varepsilon}(N))} K(s,t)\,dt = \sum_{t_j^{(N)} \in \Gamma(\vec{\rho}(N))} A_j^{(N)} K\bigl(s, t_j^{(N)}\bigr) + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

выполненного при всех $s \in [0,T]$ для достаточно больших $N$.

Применив рассуждения, использованные при доказательстве леммы 1, получим

$$\|A\|_C \leqslant q_3$$

при некотором числе $q_3$, таком, что $0 < q_3 < 1$. Лемма доказана.

**Теорема 3.** *Существует такое число $M > 0$, что при всех $N > M$ операторы $\left(I + L_{\vec{\rho}(N)}\right)^{-1}$ существуют и равномерно ограничены.*

**Доказательство.** Из лемм 2 и 3 следует, что существует равномерно ограниченная последовательность операторов $\{(I + A_{\vec{\rho}(N)})^{-1}\}$, причем последовательность операторов $\{A_{\vec{\rho}(N)}\}$ сходится поточечно на пространстве $T$-периодических непрерывных функций к оператору $A$ и оператор $(I + A)^{-1}$ ограничен. Кроме того, оператор $B$ компактен. Теперь можно воспользоваться результатом из [10]. Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Существует такое число $M > 0$, что при всех $N > M$ выполнено*

$$\left\|(I + K_N)^{-1}\right\|_C \leqslant \text{const},$$

*где постоянная не зависит от выбора $N$.*

**Доказательство.** Оценим норму оператора $(K_{\vec{\rho}(N)} - K_{\vec{\rho}(N),N})K_N$. Предположим, что $\vec{v}$ — некоторая функция из $C([0,T])$ и $s \in [0,T]$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned}\Bigl(\bigl(K_{\vec{\rho}(N)} - K_{\vec{\rho}(N),N}\bigr)K_N\,\vec{v}\Bigr)\,(s) = &\int\limits_{[0,T]\setminus\Gamma(\vec{\rho}(N))} K(s,t)\left(\vec{F}_1(t) + \vec{F}_2(t) + \vec{\Psi}(s)\right)dt\,- \\ &- \sum_{t_i^{(N)} \in [0,T]\setminus\Gamma(\vec{\rho}(N))} A_i^{(N)} K\bigl(s, t_i^{(N)}\bigr)\left(\vec{F}_1\bigl(t_i^{(N)}\bigr) + \vec{F}_2\bigl(t_i^{(N)}\bigr) + \vec{\Psi}(s)\right),\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\vec{\Psi}(s) = \vec{v}(s) + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(N)} K\bigl(s, t_j^{(N)}\bigr)\left(\vec{v}\bigl(t_j^{(N)}\bigr) + \vec{v}(s)\right),$$

$$\vec{F}_1(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(N)} K\bigl(t, t_j^{(N)}\bigr)\,\vec{v}\bigl(t_j^{(N)}\bigr), \quad \vec{F}_2(t) = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(N)} K\bigl(t, t_j^{(N)}\bigr)\right)\vec{v}(t).$$

К (23) применим рассуждения, проведенные при доказательстве теорем 1 и 2. Заметим, что в терминах теоремы 1 при всех $j = 0, \ldots, J-1$ и при любом $k = 1, \ldots, N_j$ каждая из компонент функции

$\vec{F}_1(t)$ допускает ограниченное (независимо от $N$ и $k$) аналитическое продолжение с отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ вещественной оси в круг $M_{t_{k,0}}$ комплексной плоскости. Построение вектора $\vec{\rho}(N)$ обеспечивает при всех $t \in [0,T] \setminus \Gamma(\vec{\rho}(N))$ выполнение соотношения

$$\left\| E - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(N)} K\big(t, t_j^{(N)}\big) \right\|_\infty = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Кроме того,

$$\left\| \vec{\Psi} \right\|_C \leqslant \mathrm{const} \cdot \|\vec{v}\|_C .$$

Тогда соотношение (20) позволяет заключить, что при достаточно больших $N$ имеет место оценка

$$\left\| \left( K_{\vec{\rho}(N)} - K_{\vec{\rho}(N),N} \right) K_N \right\|_C = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Так как по теореме 3 операторы $\left(I + L_{\vec{\rho}(N)}\right)^{-1}$ существуют и равномерно ограничены, то для некоторого числа $R > 0$ найдется такое $M_0 > 0$, что для всех $N > M_0$ выполнено

$$\left\| \left(I + L_{\vec{\rho}(N)}\right)^{-1} \right\|_C \leqslant R .$$

Выберем $M_1$ таким, что при $N > M_1$

$$\left\| \left( K_{\vec{\rho}(N)} - K_{\vec{\rho}(N),N} \right) K_N \right\|_C \leqslant \frac{1}{2R}.$$

Тогда [5] при $N > M = \max(M_0, M_1)$ оператор

$$\left( I + L_{\vec{\rho}(N)} + \left( K_{\vec{\rho}(N)} - K_{\vec{\rho}(N),N} \right) K_N \right)^{-1}$$

существует и равномерно ограничен.

Из представления

$$\left( I + K_{\vec{\rho}(N)} - K_{\vec{\rho}(N),N} \right) (I + K_N) = \left( I + L_{\vec{\rho}(N)} + \left( K_{\vec{\rho}(N)} - K_{\vec{\rho}(N),N} \right) K_N \right)$$

получаем [8], что оператор $(I + K_N)^{-1}$ существует и ограничен при $N > M$ и

$$(I + K_N)^{-1} = \left( I + L_{\vec{\rho}(N)} + \left( K_{\vec{\rho}(N)} - K_{\vec{\rho}(N),N} \right) K_N \right)^{-1} \left( I + K_{\vec{\rho}(N)} - K_{\vec{\rho}(N),N} \right).$$

Теорема доказана.

**Теорема 5.** *Существует такое число $M > 0$, что при всех целых $N > M$ решение $\vec{\varphi}_n$ уравнения*

$$\vec{\varphi}^{(N)} + K_N \vec{\varphi}^{(N)} = \vec{f}$$

*существует и единственно и выполнена оценка*

$$\left\| \vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{(N)} \right\|_C \leqslant \mathrm{const} \cdot \exp(-c\sqrt{n}),$$

*где $\vec{\varphi}$ является решением системы (3), а $c_1 N^2 \leqslant n \leqslant c_2 N^2$, причем все постоянные строго положительны и не зависят от выбора $N$.*

**Доказательство.** Теорема 4 обеспечивает существование и единственность решения уравнения (17). Вычитая друг из друга (3) и (17), получим

$$(I + K_N)\big(\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{(N)}\big) = (K_N - K)\vec{\varphi},$$

откуда

$$\left\| \vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{(N)} \right\|_C = \left\| (I + K_N)^{-1} (K_N - K) \vec{\varphi} \right\|_C = O\big(\exp(-c\sqrt{n})\big).$$

Теорема доказана.

Предложенный метод применим к системе (3) и в более общем случае, когда область $\Omega$ является криволинейным многоугольником, т.е. когда все или некоторые участки $\Gamma_j$ кривой $\Gamma$, соединяющие угловые точки $P_j$ и $P_{j+1}$, $j = 1, \ldots, J-1$, являются аналитическими дугами, причем угол между касательными к кривым $\Gamma_{j-1}$ и $\Gamma_j$ в вершине $P_j$, обращенный внутрь области $\Omega$, отличен от 0 и $2\pi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Арушанян И.О.* О численном решении граничных интегральных уравнений второго рода в областях с угловыми точками // ЖВМ и МФ. **36**, № 5. 537–548.
2. *Бахвалов Н.С.* Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. **7**, № 5. 1011–1020.
3. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. М.–Л.: ГТТИ, 1934.
4. *Заргарян С.С.* Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе в окрестности угловых точек контура // Докл. АН Арм. ССР. 1983. **77**, № 4. 437–439.
5. *Канторович Л.И., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
6. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. **27**. М.: ВИНИТИ, 1988. 131–228.
7. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
8. *Graham I.G., Chandler G.A.* High-order methods for linear functionals of solutions of second kind integral equations // SIAM J. Numer. Anal. 1988. **25**, N 5. 1118–1137.
9. *Kress R.* A Nyström method for boundary integral equations in domains with corners // Numer. Math. 1990. **58**, N 2. 145–161.
10. *Kress R.* Linear integral equations. New York–Berlin–Heidelberg: Springer, 1989.


Поступила в редакцию
23.12.2002