УДК 519.6

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ МЕТОДОМ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА

О. В.Беленькая[1], Я. М. Жилейкин[1], А. Б.Кукаркин[1]

В работе методом полного перебора вычислены оптимальные коэффициенты теоретико-числовых квадратурных формул для двумерного случая. Проведено сравнение оптимальных коэффициентов, полученных разными способами.

Рассмотрим задачу приближенного вычисления s-кратного интеграла по квадратурным формулам с теоретико-числовыми сетками [1 – 3]

$$\int_0^1\int_0^1\dots\int_0^1 f(x_1,x_2,\dots,x_s)\,dx_1dx_2\dots dx_s=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{ka_1}{N}\right\},\left\{\frac{ka_2}{N}\right\},\dots,\left\{\frac{ka_s}{N}\right\}\right)+R_N(f),\tag{1}$$

где a_j — целые числа, $\{\frac{ka_j}{N}\}$ — дробная часть числа $\frac{ka_j}{N}$. Будем предполагать, что подынтегральная функция принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$ функций s переменных $f(x_1,x_2,\dots,x_s)$, периодических с периодом 1 по каждой переменной, коэффициенты Фурье которых

$$c(m_1,m_2,\dots,m_s)=\int_0^1\int_0^1\dots\int_0^1 f(x_1,x_2,\dots,x_s)\,e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_sx_s)}\,dx_1dx_2\dots dx_s$$

удовлетворяют неравенству

$$\big|c(m_1,m_2,\dots,m_s)\big|\leqslant\frac{C}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\dots\overline{m}_s)^\alpha},$$

где $\overline{m}_j=\max\{1,|m_j|\}$ и $\alpha>1$.

В [1] дано такое определение оптимальных коэффициентов: целые числа $a_j=a_j(N)$ $(j=1,2,\dots,s)$ называются оптимальными коэффициентами, если для некоторой бесконечной последовательности значений N существуют константы $\beta=\beta(s)$, $C_0=C_0(s)$, такие, что

$$\sum_{m_1,m_2,\dots,m_s=-(N-1)}^{N-1}{}' \frac{\delta_N(a_1m_1+a_2m_2+\dots+a_sm_s)}{\overline{m}_1\overline{m}_2\dots\overline{m}_s}\leqslant C_0\,\frac{\ln^\beta N}{N}.\tag{2}$$

Здесь

$$\delta_N(m)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad m=kN,\\ 0, & \text{если}\quad m\neq kN,\end{cases}$$

где $k\in Z$, а знак штрих означает, что в сумме отсутствует член с $m_1=m_2=\ldots=m_s=0$.

Доказано также, что при вычислении s-кратных интегралов от функции $f(x_1,x_2,\dots,x_s)\in E_s^\alpha(C)$ по квадратурным формулам с теоретико-числовыми сетками $M_k(\{\frac{ka_1}{N}\},\dots,\{\frac{ka_s}{N}\})$, $k=1,2,\dots,N$, выполняется оценка

$$\big|R_N(f)\big|\leqslant CC'\,\frac{\ln^{\alpha\beta}N}{N^\alpha},\tag{3}$$

где C' — константа, зависящая только от α и s.

Кроме того, доказано, что для каждого нетривиального решения сравнения

$$a_1m_1+a_2m_2+\dots+a_sm_s\equiv 0\pmod N\tag{4}$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: jam@srcc.msu.su

выполняется неравенство

$$\overline{m}_1\overline{m}_2\ldots\overline{m}_s > \frac{N}{C_0 ln^{\beta} N}.$$

Напомним, что нетривиальное решение сравнения (4) определяет индексы $m_1, m_2, \ldots, m_s$ коэффициентов Фурье $c(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ функции $f(x_1, \ldots, x_s) \in E_s^{\alpha}(C)$, которые вносят вклад в величину погрешности $R_N(f)$. Поэтому величина $b = \frac{N}{\min(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)}$ характеризует свойства кубатурной формулы на классе $E_s^{\alpha}(C)$: чем эта величина меньше, тем формула точнее.

Известны несколько способов вычисления оптимальных коэффициентов $a_1, \ldots, a_s$; каждый способ характеризуется числом операций, необходимых для их вычисления. В [1] предлагается алгоритм получения оптимальных коэффициентов, удовлетворяющих определению (2), и требующий $O(N^{4/3})$ арифметических операций.

Справедливо следующее утверждение: наилучшими оптимальными коэффициентами в смысле оценки погрешности (3) являются коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_s$, для которых $\min(\overline{m}_1\overline{m}_2\ldots\overline{m}_s)$ нетривиального решения сравнения (4) достигает своего максимума. Из этого следует, что наилучшие оптимальные коэффициенты могут быть получены в результате полного перебора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ по $\mathrm{mod}\ N$. Однако реализация этого перебора требует большого количества операций — $O(N^{2(s-1)})$.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма вычисления наилучших оптимальных коэффициентов за меньшее количество операций, а также сравнительный анализ качества оптимальных коэффициентов, полученных различными методами.

Ниже будет рассмотрен двумерный случай. Известно, что в двумерном случае наилучшими оптимальными коэффициентами для $N = Q_n$ (Q_n — общий член последовательности Фибоначчи) являются числа

$$a_1 = 1, \quad a_2 = Q_{n-1} \quad \text{и} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = Q_{n-2}.$$

В [2] доказано, что для погрешности квадратурной формулы (1) на классе $E_2^{\alpha}(C)$ справедлива оценка

$$R_N \leqslant CC' \frac{\ln N}{N^{\alpha}},$$

а в [3] доказана неулучшаемость этой оценки.

Нами путем полного перебора вычислены наилучшие оптимальные коэффициенты $a_1 = 1$, $a_2 = a^*$ для простых N и для $N = 2^n$. Для контроля и сравнения тем же методом были вычислены наилучшие оптимальные коэффициенты для чисел Фибоначчи. Для простых N были также вычислены оптимальные коэффициенты $a_1 = 1$, $a_2 = a$ в смысле определения (2) по алгоритму из [1].

Примененный для вычисления наилучших оптимальных коэффициентов алгоритм использует $O(n^2)$ операций. Вопрос о реализации полного перебора за существенно меньшее количество операций будет рассматриваться в следующих наших работах.

простые числа							2^n				числа Фибоначчи			
N	$\Psi(a^*)$	a^*	b^*	$\Psi(a)$	a	b	N	$\Psi(a^*)$	a^*	b^*	N	$\Psi(a^*)$	a^*	b^*
23	6	10	3.83	6	10	3.83	16	6	6	2.67	13	5	5	2.60
31	10	13	3.10	10	12	3.10	32	8	14	4.00	21	8	8	2.62
37	10	11	3.70	10	11	3.70	64	19	27	3.37	34	13	13	2.62
97	26	41	3.73	24	35	4.04	128	39	49	3.28	55	21	21	2.62
101	30	37	3.37	26	44	3.88	256	78	98	3.28	89	34	34	2.62
199	55	76	3.62	55	55	3.62	512	150	198	3.41	144	55	55	2.62
307	95	129	3.23	95	129	3.23	1024	275	283	3.72	233	89	89	2.62
523	132	202	3.96	132	189	3.96	2048	550	566	3.72	377	144	144	2.62
701	194	271	3.61	194	271	3.61	4096	1197	1731	3.42	610	233	233	2.62
1069	287	406	3.72	262	469	4.08	8192	2431	2433	3.37	987	377	377	2.62
1543	425	570	3.63	425	425	3.63	16384	5108	6915	3.21	1597	610	610	2.62
2129	570	898	3.73	570	898	3.73					2584	987	987	2.62
3001	924	1140	3.25	610	1348	4.92					4181	1597	1597	2.62
4001	1299	1654	3.08	843	1552	4.75					6765	2584	2584	2.62
5003	1555	1939	3.22	950	2264	5.27					10946	4181	4181	2.62
6007	1678	2488	3.58	852	2538	7.05					17711	6765	6765	2.62
8191	2431	3457	3.37	795	795	10.30								
10007	2576	4346	3.88	728	3764	13.75								

В таблице помещены вычисленные наилучшие оптимальные коэффициенты a^* и значения $\Psi(a^*)$, $b^* = \frac{N}{\Psi(a^*)}$, характеризующие соответствующие квадратурные формулы.

Метод вычисления наилучших оптимальных коэффициентов a^* состоит в следующем. Рассмотрим сравнение

$$m_1 + am_2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, N), \tag{5}$$

где m_1, m_2, a — целые числа, такие, что

$$-(N-1) \leqslant m_1 \leqslant N-1, \quad -(N-1) \leqslant m_2 \leqslant N-1, \quad 1 < a \leqslant N-1.$$

Для заданного a найдем величину

$$\Psi(a) = \min_{m_1, m_2} (\overline{m}_1 \overline{m}_2),$$

где минимум ищется по всем нетривиальным решениям сравнения (5). В качестве оптимального коэффициента выбирается то значение a^*, при котором достигается максимум $\Psi(a)$:

$$\Psi(a^*) = \max_{1 \leqslant a \leqslant (N-1)} \Psi(a).$$

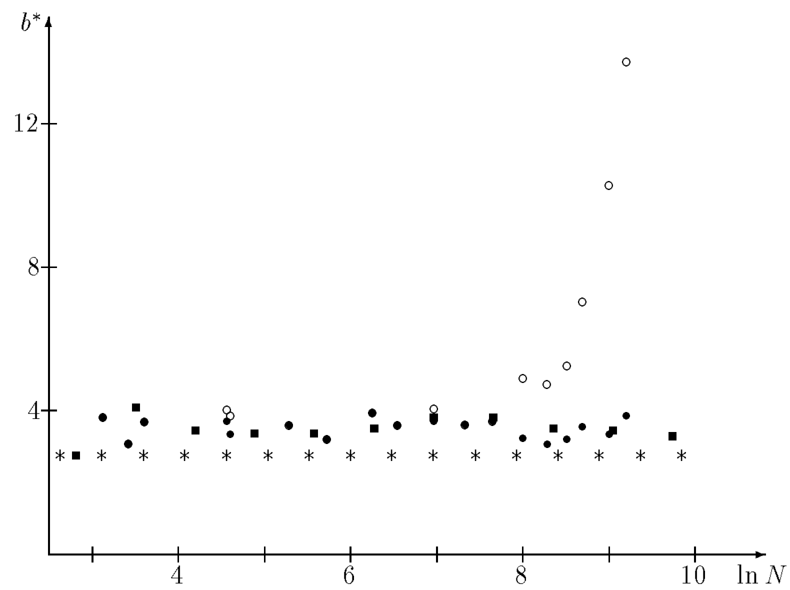
Нетрудно показать, что для осуществления полного перебора достаточно рассмотреть следующие диапазоны изменения переменных:

$$-\left\{\frac{N-1}{2}\right\} \leqslant m_1 \leqslant \left\{\frac{N-1}{2}\right\}, \quad 1 \leqslant m_2 \leqslant \left\{\frac{N}{2}\right\}, \quad 2 \leqslant a \leqslant \left\{\frac{N}{2}\right\};$$

при этом наряду с a^* наилучшим оптимальным коэффициентом будет также число $N - a^*$. Для простых N в таблице приведены также вычисленные методом из [1] оптимальные коэффициенты a и соответствующие значения $\Psi(a)$, $b = \frac{N}{\Psi(a)}$.

Из анализа приведенных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Как и следовало ожидать, вычисленные методом полного перебора для $N = Q_n$ оптимальные коэффициенты a^* совпадают с Q_{n-1} и Q_{n-2}, т.к. $Q_{n-1} = N - Q_{n-2}$. Величина b^* не превосходит константы, близкой к 2.62; это означает, что любое нетривиальное решение сравнения уравнения (5) удовлетворяет неравенству $\overline{m}_1 \overline{m}_2 > \mathrm{const} \cdot N$ ($\mathrm{const} \approx 0.38$). Результатом этого является наличие в числителе оценки погрешности $\ln N$ в первой степени.



2. Для случаев простого N и $N = 2^n$ величина b^* в диапазоне рассмотренных значений этих параметров также не превосходит константы. Эта константа порядка 4, она несколько превосходит константу для чисел Фибоначчи.

3. В случае вычисления оптимальных коэффициентов по алгоритму из [1] величина b возрастает, что говорит о несколько худшем качестве этих оптимальных коэффициентов, а также о том, что алгоритм полного перебора является предпочтительнее в смысле точности квадратурной формулы.

Для наглядности зависимость b^* от $\ln N$ представлена на графике ($*$ — числа Фибоначчи, $\blacksquare$ — 2^n, $\bullet$ — простые числа, $\circ$ — простые числа, метод работы [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 02–01–00742.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: ГИФМЛ, 1963.
2. *Бахвалов Н.С.* О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1959. № 4. 3–18.
3. *Neiderreiter H.* Random number generation and quasi-Monte Carlo methods. Philadelphia: SIAM, 1992.

Поступила в редакцию
03.03.2003