УДК 517.988.68

ГРАДИЕНТНО-ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КВАЗИРЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Козлов[1]

Строится и исследуется итерационный метод для нахождения квазирешения нелинейного некорректного операторного уравнения на выпуклом замкнутом множестве в гильбертовом пространстве в условиях погрешностей. Рассматриваемый процесс является комбинацией метода проекции градиента и процедуры проектирования получаемых итераций на специально выбираемые конечномерные подпространства. Устанавливается стабилизация вырабатываемых приближений в малой окрестности искомого квазирешения.

---

1. Объектом изучения в работе является уравнение

$$F(x) = 0, \quad x \in H_1, \tag{1}$$

где $F\colon H_1 \to H_2$ — нелинейный оператор, H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Ставится задача отыскания квазирешения уравнения (1) на выпуклом замкнутом множестве $Q \subset H_1$, т. е. точки $x^* \in Q$, являющейся решением задачи

$$\min_{x \in Q} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\left\|F(x)\right\|^2. \tag{2}$$

Здесь и далее через $\|\cdot\|$ обозначается норма соответствующего пространства.

Как известно [1, с. 28], точка $x^* \in Q$, удовлетворяющая необходимому условию минимума первого порядка в задаче (2), характеризуется соотношением

$$\bigl(\varphi'(x^*), x - x^*\bigr) = \bigl(F'^*(x^*)F(x^*),\, x - x^*\bigr) \geqslant 0 \quad \forall x \in Q. \tag{3}$$

Предполагается, что оператор $F(x)$ дважды дифференцируем по Гато и для всех точек $x, y \in \Omega_R(x^*)$ выполняются условия

$$\left\|F'(x)\right\| \leqslant N_1, \quad \left\|F''(x)\right\| \leqslant N_2, \quad \left\|F''(x) - F''(y)\right\| \leqslant L\,\|x - y\|, \tag{4}$$

где $\Omega_R(x^*) = \bigl\{x \in H_1\colon \|x - x^*\| \leqslant R\bigr\}$. На оператор $F(x)$ не налагается каких–либо условий регулярности, предусматривающих непрерывную обратимость его производной $F'(x)$, либо условий регулярности оператора $F'^*(x)F'(x)$ в окрестности квазирешения уравнения (1). В этих условиях задачи (1), (2) являются в общем случае некорректными [1–3], так что сколь угодно малая вариация оператора $F(x)$ может привести к существенным изменениям решений этих задач либо вовсе превратить их в задачи, не имеющие решений. Потребности численного исследования этих задач диктуют необходимость разработки устойчивых методов отыскания решений задачи (1), (2) при наличии погрешностей в задании оператора $F(x)$.

Считаем, что вместо точного оператора $F(x)$ доступно лишь его приближение $\tilde{F}\colon H_1 \to H_2$, обладающее в точках $\Omega_R(x^*)$ производной Гато. Предполагается также, что для всех $x \in \Omega_R(x^*)$ выполняется оценка

$$\left\|\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}(x) - F'^*(x)F(x)\right\| \leqslant \delta, \tag{5}$$

где δ — известный уровень погрешности в задании $F(x)$.

В [4–7] в предположении разрешимости исходного уравнения были построены и исследованы итерационные методы решения (1), основанные на линеаризации уравнения в текущей итерационной точке и приближенной аппроксимации квазирешения линеаризованной задачи с использованием процедур регуляризации линейных некорректных уравнений. Другой подход к построению итерационных методов нахождения решения уравнения (1) развивается в работах [8–12], где предложена и исследована группа

[1] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пр. Ленина, 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kozlovv@marsu.ru

итерационных процессов градиентного типа с проектированием на специально выбираемые конечномерные подпространства. В данной работе рассматривается более общая задача нахождения квазирешения уравнения (1) на выпуклом замкнутом множестве $Q \subset H_1$, не совпадающем в общем случае с H_1. В случае $Q = H_1$ предлагаемый ниже итерационный метод близок к методам, изучавшимся в [9–12].

Зафиксируем управляющий параметр $\xi \in H_1$, конечномерное подпространство $M \subset H_1$ и обозначим через P_Q оператор проектирования из H_1 на множество Q, т. е. для любого $x \in H_1$

$$P_Q(x) \in Q, \quad \|x - P_Q(x)\| = \inf_{z \in Q} \|x - z\|.$$

Положим также

$$M_\xi = \{x \in H_1 : x = \xi + v,\, v \in M\}.$$

В настоящей работе для отыскания квазирешения $x^* \in Q$ предлагается и исследуется следующий итерационный процесс:

$$x_0 \in H_1, \quad x_{n+1} = P_Q\big(P_M x_n + \xi - P_M \xi - \gamma P_M \tilde{F}'^*(P_M x_n + \xi - P_M \xi)\tilde{F}(P_M x_n + \xi - P_M \xi)\big), \quad \gamma > 0. \qquad (6)$$

Поскольку $P_M x_n + \xi - P_M \xi = P_{M_\xi}(x_n)$, процесс (6) может быть представлен в виде

$$x_0 \in H_1, \quad y_n = P_{M_\xi}(x_n), \quad x_{n+1} = P_Q\big(y_n - \gamma P_M \tilde{F}'^*(y_n)\tilde{F}(y_n)\big).$$

Таким образом, он является комбинацией метода проекции градиента [1, с. 72] для задачи

$$\min_{y \in Q} \tilde{\psi}(y), \quad \tilde{\psi}(y) = \frac{1}{2}\big\|\tilde{F}(P_M y + \xi - P_M \xi)\big\|^2$$

и проектирования получаемых итераций на аффинное подпространство M_ξ.

Введем обозначения

$$\Delta = \big\|(E - P_M)(x^* - \xi)\big\|, \quad \Delta_1 = \big\|(E - P_M)F'^*(x^*)F(x^*)\big\|,$$

где E — единичный оператор. Величины Δ, Δ_1 имеют смысл погрешности аппроксимации квазирешения x^* аффинным подпространством M_ξ и погрешности аппроксимации элемента $F'^*(x^*)F(x^*) \in H_1$ подпространством $M \subset H_1$ соответственно. Через

$$N(F'(x^*)) = \big\{h \in H_1\colon F'(x^*)h = 0\big\}$$

обозначим нулевое подпространство оператора $F'(x^*)$.

Всюду ниже будем считать выполненным следующее основное

Условие A. *Подпространство M выбрано так, что*

$$N\big(F'(x^*)\big) \cap M = \{0\}.$$

В работе устанавливается, что если начальное приближение x_0 достаточно близко к x^*, то с некоторой постоянной $C > 0$ имеет место предельное соотношение

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, \|x_n - x^*\|^2 \leqslant C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma).$$

Согласно этому неравенству, итерационные точки x_n при $n \to \infty$ стабилизируются в окрестности квазирешения x^* с радиусом, пропорциональным δ, Δ, Δ_1, γ. Из определений Δ и Δ_1 следует, что малость этих величин может быть обеспечена за счет удачного выбора пары (M, ξ); шаговый множитель $\gamma > 0$, находящийся в нашем распоряжении, также может быть выбран достаточно малым.

2. Обратимся к исследованию сходимости итерационного процесса (6). Предположим, что для текущей итерационной точки x_n выполняется $P_{M_\xi}(x_n) \in \Omega_R(x^*)$. С использованием соотношения

$$\big\|P_Q(x) - P_Q(y)\big\| \leqslant \|x - y\| \quad \forall x, y \in H_1$$

и включения $x^* \in Q$ из (6) получаем следующую цепочку соотношений:

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \Big\| P_Q\Big(P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M \tilde{F}'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\tilde{F}\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big) - P_Q(x^*)\Big\|^2 \leqslant \\
&\leqslant \Big\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M \tilde{F}'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\tilde{F}\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - x^*\Big\|^2 = \\
&= \Big\| \Big[P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - x^*\Big] + \\
&\quad + \gamma P_M \Big[\tilde{F}'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\tilde{F}\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big]\Big\|^2 \leqslant \\
&\leqslant \Big\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - x^*\Big\|^2 + \\
&\quad + \gamma^2 \Big\|\tilde{F}'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\tilde{F}\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big\|^2 + \\
&\quad + 2\gamma \Big\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - x^*\Big\| \times \\
&\quad \times \Big\|\tilde{F}'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\tilde{F}\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big\|.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Второе слагаемое в правой части последнего неравенства в (7) в силу (5) оценивается следующим образом:

$$
\gamma^2 \Big\|\tilde{F}'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\tilde{F}\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big\|^2 \leqslant \gamma^2\delta^2. \tag{8}
$$

Последнее слагаемое в (7) оценим, используя (4), (5):

$$
\begin{aligned}
2\gamma &\Big\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - x^*\Big\| \times \\
&\times \Big\|\tilde{F}'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\tilde{F}\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big\| \leqslant \\
&\leqslant 2\gamma\delta \Big(\|P_M x_n - P_M x^*\| + \|P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi\| + \\
&\quad + \gamma \Big\|F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big\| \Big\|F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - F\big(P_{M_\xi}(x^*)\big)\Big\| + \\
&\quad + \gamma \Big\|F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big\| \Big\|F\big(P_{M_\xi}(x^*)\big) - F(x^*)\Big\| + \gamma \Big\|F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big\| \big\|F(x^*)\big\|\Big) \leqslant \\
&\leqslant 2\gamma\delta \Big(\|P_M x_n - P_M x^*\| + \Delta + \gamma N_1^2 \|P_M x_n - P_M x^*\| + \gamma N_1^2 \Delta + \gamma N_1 \big\|F(x^*)\big\|\Big).
\end{aligned} \tag{9}
$$

С учетом (4), для нормы первого слагаемого в правой части заключительного неравенства в (7) имеем оценку

$$
\begin{aligned}
&\Big\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - x^*\Big\|^2 = \\
&\quad = \Big\|(P_M x_n - P_M x^*) + (P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi) - \gamma P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big\|^2 = \\
&\quad = \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + \|P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi\|^2 + \gamma^2 \Big\|F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big\|^2 - \\
&\qquad - 2\gamma \Big(P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big),\ P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi\Big) - \\
&\qquad - 2\gamma \Big(P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big),\ P_M x_n - P_M x^*\Big) \leqslant \\
&\quad \leqslant \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + \Delta^2 + \gamma^2 N_1^2 \Big(2N_1^2 \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + 4N_1^2\Delta^2 + 4\big\|F(x^*)\big\|^2\Big) + \\
&\qquad + 2\gamma N_1 \Delta \Big(N_1 \|P_M x_n - P_M x^*\| + N_1\Delta + \big\|F(x^*)\big\|\Big) + \\
&\qquad + 2\gamma \Big(P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big),\ P_M x^* - P_M x_n\Big).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Представим последнее слагаемое в (10) в виде

$$
\begin{aligned}
&2\gamma\Big(P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big),\, P_M x^* - P_M x_n\Big) = \\
&\quad = -2\gamma\left(P_M F'^*(x^*)F'(x^*)(P_M x_n - P_M x^*),\, P_M x_n - P_M x^*\right) + \\
&\qquad + 2\gamma\Big(P_M\left(F''(x^*)(P_M x_n - P_M x^*)\right)^* F(x^*),\, P_M x^* - P_M x_n\Big) + \\
&\qquad + 2\gamma\bigg(P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big(F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - F\big(P_{M_\xi}(x^*)\big) - \\
&\qquad - F'\big(P_{M_\xi}(x^*)\big)(P_M x_n - P_M x^*)\Big),\, P_M x^* - P_M x_n\bigg) + 2\gamma\bigg(P_M\Big(F'\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - F'\big(P_{M_\xi}(x^*)\big) - \\
&\qquad - F''\big(P_{M_\xi}(x^*)\big)(P_M x_n - P_M x^*)\Big)^* F(x^*),\, P_M x^* - P_M x_n\bigg) + \\
&\qquad + 2\gamma\bigg(P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big(F\big(P_{M_\xi}(x^*)\big) - F(x^*)\Big), P_M x^* - P_M x_n\bigg) + \\
&\qquad + 2\gamma\bigg(P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)\Big(F'\big(P_{M_\xi}(x^*)\big) - F'(x^*)\Big)(P_M x_n - P_M x^*),\, P_M x^* - P_M x_n\bigg) + \\
&\qquad + 2\gamma\bigg(P_M\Big(F'\big(P_{M_\xi}(x_n)\big) - F'\big(P_{M_\xi}(x^*)\big)\Big)^* F'(x^*)(P_M x_n - P_M x^*),\, P_M x^* - P_M x_n\bigg) + \\
&\qquad + 2\gamma\bigg(P_M\Big(F'\big(P_{M_\xi}(x^*)\big) - F'(x^*)\Big)^* F'(x^*)(P_M x_n - P_M x^*),\, P_M x^* - P_M x_n\bigg) + \\
&\qquad + 2\gamma\bigg(P_M\Big(F''\big(P_{M_\xi}(x^*)\big) - F''(x^*)(P_M x_n - P_M x^*)\Big)^* F(x^*),\, P_M x^* - P_M x_n\bigg) + \\
&\qquad + 2\gamma\bigg(P_M\Big(F'^*\big(P_{M_\xi}(x^*)\big) - F'^*(x^*)\Big)^* F(x^*),\, P_M x^* - P_M x_n\bigg) + \\
&\qquad + 2\gamma\Big(\left(P_M F'^*(x^*)F(x^*) - F'^*(x^*)F(x^*)\right),\, x^* - x_n\Big) + 2\gamma\left(F'^*(x^*)F(x^*),\, x^* - x_n\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Оценим отдельные слагаемые в правой части равенства (11). Рассмотрим оператор $P_M F'^*(x^*)F'(x^*)P_M$, действующий из конечномерного пространства M в M. Очевидно, что он самосопряжен и в силу условия A не содержит точку $\lambda = 0$ в своем спектре. Поэтому линейный оператор $P_M F'^*(x^*)F'(x^*)P_M$ имеет непрерывный обратный. Следовательно, найдется такое $q > 0$, что для всех $h \in M$ выполняется

$$\big(P_M F'^*(x^*)F'(x^*)P_M h, h\big) \geqslant q\,\|h\|^2. \tag{12}$$

Определим линейный непрерывный оператор $\Phi(x^*)\colon H_1 \to H_1$ равенством

$$\Phi(x^*)y = \big(F''(x^*)y\big)^* F(x^*), \quad y \in H_1. \tag{13}$$

Согласно (13), справедлива оценка

$$2\gamma\Big(\big(F''(x^*)(P_M x_n - P_M x^*)\big)^* F(x^*),\, P_M x^* - P_M x_n\Big) \leqslant 2\gamma\,\big\|\Phi(x^*)\big\|\,\|P_M x_n - P_M x^*\|^2. \tag{14}$$

Оценивая с учетом (3), (4), (12), (14) остальные слагаемые в правой части (11), получаем

$$
\begin{aligned}
&2\gamma\Big(P_M F'^*\big(P_{M_\xi}(x_n)\big)F\big(P_{M_\xi}(x_n)\big),\, P_M x^* - P_M x_n\Big) \leqslant \\
&\quad \leqslant -2\gamma q\,\|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + 2\gamma\,\|\Phi(x^*)\|\,\|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + 2\gamma N_1 N_2\,\|P_M x_n - P_M x^*\|^3 + \\
&\qquad + \gamma L\,\|F(x^*)\|\,\|P_M x_n - P_M x^*\|^3 + 2\gamma N_1^2\,\|P_M x_n - P_M x^*\|\,\Delta + 2\gamma N_1 N_2\,\|P_M x_n - P_M x^*\|^2\Delta + \\
&\qquad + 2\gamma N_1 N_2\,\|P_M x_n - P_M x^*\|^3 + 2\gamma N_1 N_2\,\|P_M x_n - P_M x^*\|^2\,\Delta + \\
&\qquad + 2\gamma L\,\big\|F(x^*)\big\|\,\|P_M x_n - P_M x^*\|^2\Delta + 2\gamma N_2\,\big\|F(x^*)\big\|\,\|P_M x_n - P_M x^*\|\,\Delta + 2\gamma\,\|x_n - x^*\|\,\Delta_1.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Объединяя соотношения (7) – (12), (14), (15), имеем

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leqslant 2\gamma\left(\delta+\gamma N_1^2\delta+2N_1^2\Delta+N_2\big\|F(x^*)\big\|\Delta\right)\|P_Mx_n-P_Mx^*\|+2\gamma\Delta_1\|x_n-x^*\|+\\ +\left(1+2\gamma\Big(-q+\big\|\Phi(x^*)\big\|+\gamma N_1^4+2N_1N_2\Delta+L\,\big\|F(x^*)\big\|\,\Delta\Big)\right)\|P_Mx_n-P_Mx^*\|^2+\\ +\gamma\left(4N_1N_2+L\big\|F(x^*)\big\|\right)\|P_Mx_n-P_Mx^*\|^3+4\gamma^2N_1^2\,\big\|F(x^*)\big\|^2+2\gamma^2N_1\,\big\|F(x^*)\big\|\,\delta+\\ +\gamma^2\delta^2+2\gamma\delta\Delta+2\gamma^2N_1^2\delta\Delta+2\gamma N_1\big\|F(x^*)\big\|\Delta+2\gamma N_1^2\Delta^2+\Delta^2+4\gamma^2N_1^4\Delta^2.\end{aligned}\tag{16}$$

Из (16) с учетом неравенства $2a \leqslant a^2+1$ следует

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leqslant \Big(1+\gamma\,\Big(-2q+2\,\big\|\Phi(x^*)\big\|+\delta+4N_1N_2\Delta+2N_1^2\Delta+N_2\big\|F(x^*)\big\|\Delta+2L\,\big\|F(x^*)\big\|\,\Delta+\\ +\gamma N_1^2\delta+2\gamma N_1^4\Big)\Big)\,\|P_Mx_n-P_Mx^*\|^2+\gamma\Delta_1\|x_n-x^*\|^2+\gamma\Big(4N_1N_2+L\big\|F(x^*)\big\|\Big)\times\\ \times\|P_Mx_n-P_Mx^*\|^3+\gamma\delta+2\gamma\delta\Delta+2\gamma N_1^2\Delta+2\gamma N_1\,\big\|F(x^*)\big\|\,\Delta+\gamma N_2\big\|F(x^*)\big\|\,\Delta+\\ +\Delta^2+2\gamma N_1^2\Delta^2+\gamma\Delta_1+4\gamma^2N_1^2\big\|F(x^*)\big\|^2+\gamma^2N_1^2\delta+\gamma^2\delta^2+\\ +2\gamma^2N_1\big\|F(x^*)\big\|\,\delta+2\gamma^2N_1^2\delta\Delta+4\gamma^2N_1^4\Delta^2.\end{aligned}\tag{17}$$

Оценку правой части неравенства (17) продолжим в предположении, что оператор $F(x)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию.

Условие B. *Для оператора* (13) *справедливо неравенство*

$$\big\|\Phi(x^*)\big\| \leqslant \frac{q}{8}\,,$$

где величина $q>0$ *определяется соотношением* (12).

Согласно (13), имеет место оценка

$$\big\|\Phi(x)\big\| \leqslant \big\|F''(x^*)\big\|\,\big\|F(x^*)\big\|\,.$$

Отсюда следует, что условие B выполняется, например, в каждом из следующих случаев.

1. Невязка $F(x^*)$ достаточно мала, так что

$$\big\|F(x^*)\big\| \leqslant (8N_2)^{-1}q\,.$$

2. Вторая производная $F''(x^*)$ мала, так что

$$\big\|F''(x^*)\big\| \leqslant \Big(8\big\|F(x^*)\big\|\Big)^{-1}q\,.$$

Последнее неравенство означает, что оператор $F(x)$ близок к линейному в окрестности точки x^*.

Обозначим далее

$$\begin{aligned}M(\delta,\Delta)=\max\Big\{1,\ 1+2\Delta,\ 2N_1^2\Delta+2N_1^2+2N_1\big\|F(x^*)\big\|+N_2\big\|F(x^*)\big\|,\\ 4N_1^2\big\|F(x^*)\big\|^2+\delta^2+N_1^2\delta+2N_1\big\|F(x^*)\big\|\,\delta+2N_1^2\delta\Delta+4N_1^4\Delta^2\Big\}.\end{aligned}$$

С учетом условия B и введенного обозначения, из (17) получаем следующую промежуточную оценку

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leqslant \Big(1-7/4\,\gamma q+\gamma\,\Big(\delta+4N_1N_2\Delta+2N_1^2\Delta+N_2\big\|F(x^*)\big\|\,\Delta+2L\,\big\|F(x^*)\big\|\,\Delta+\\ +\gamma N_1^2\delta+2\gamma N_1^4\Big)\Big)\|P_Mx_n-P_Mx^*\|^2+\gamma\Delta_1\|x_n-x^*\|^2+\gamma\,\Big(4N_1N_2+L\big\|F(x^*)\big\|\Big)\times\\ \times\|P_Mx_n-P_Mx^*\|^3+\gamma M(\delta,\Delta)(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)+\Delta^2.\end{aligned}\tag{18}$$

Завершив необходимые вспомогательные построения, перейдем к доказательству основного результата работы.

3. Покажем, что при выполнении соответствующих условий на параметры процедуры (6) и погрешности δ, Δ, Δ_1 с подходящими постоянными $\overline{q}\in(0,1)$, l, C, $\gamma>0$ имеют место соотношения

$$\|x_n-x^*\|^2\leqslant l\,\overline{q}^{\,n}+C(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma),\quad P_{M_\xi}(x_n)\in\Omega_R(x^*),\quad n\geqslant 0. \tag{19}$$

Предположим, что (19) справедливы для $n=0$ и некоторого номера $n\geqslant 1$ и покажем, что тогда

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant l\,\overline{q}^{\,n+1}+C(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma),\quad P_{M_\xi}(x_{n+1})\in\Omega_R(x^*). \tag{20}$$

Заметим, что неравенство

$$\bigl(l+C(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)\bigr)^{1/2}+\Delta\leqslant R \tag{21}$$

обеспечивает принадлежность точки $P_{M_\xi}(x_0)$ области $\Omega_R(x^*)$, поскольку при выполнении (21) имеем

$$\begin{aligned}\bigl\|P_{M_\xi}(x_0)-x^*\bigr\|&=\|P_Mx_0-x^*+\xi-P_M\xi\|\leqslant\|P_Mx_0-P_Mx^*\|+\|P_Mx^*-x^*+\xi-P_M\xi\|\leqslant\\&\leqslant\bigl(l+C(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)\bigr)^{1/2}+\Delta\leqslant R.\end{aligned}$$

Из (18), (19) получаем

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant\Biggl(1-7/4\,\gamma q+\gamma\Bigl(\delta+4N_1N_2\Delta+2N_1^2\Delta+N_2\bigl\|F(x^*)\bigr\|\Delta+2L\,\bigl\|F(x^*)\bigr\|\,\Delta+\\+\gamma N_1^2\delta+2\gamma N_1^4+\bigl(l+C(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)\bigr)^{1/2}\Bigl(4\gamma N_1N_2+\gamma L\bigl\|F(x^*)\bigr\|\Bigr)\Bigr)\Biggr)\times\\\times\|P_Mx_n-P_Mx^*\|^2+\gamma\Delta_1\|x_n-x^*\|^2+\gamma M(\delta,\Delta)(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)+\Delta^2.\end{aligned} \tag{22}$$

Потребуем выполнения следующих ограничений на константы $\overline{q}$, l, C, γ и погрешности δ, Δ, Δ_1:

$$\delta+4N_1N_2\Delta+2N_1^2\Delta+N_2\bigl\|F(x^*)\bigr\|\,\Delta+2L\,\bigl\|F(x^*)\bigr\|\,\Delta+\bigl(C(\delta+\Delta+\Delta_1)\bigr)^{1/2}\Bigl(4N_1N_2+L\,\bigl\|F(x^*)\bigr\|\Bigr)\leqslant\frac{q}{8}\,, \tag{23}$$

$$\gamma N_1^2\delta+2\gamma N_1^4+(\gamma C)^{1/2}\Bigl(4N_1N_2+L\,\bigl\|F(x^*)\bigr\|\Bigr)\leqslant\frac{q}{4}\,, \tag{24}$$

$$l^{1/2}\Bigl(4N_1N_2+L\,\bigl\|F(x^*)\bigr\|\Bigr)\leqslant\frac{q}{4}\,, \tag{25}$$

$$0<1-9/8\,\gamma q\leqslant\overline{q}<1\,, \tag{26}$$

$$C(1-\gamma q)+\gamma M(\delta,\Delta)+\Delta\leqslant C, \tag{27}$$

Из (22) – (26) следует

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant(1-9/8\,\gamma q)\,\|x_n-x^*\|^2+\gamma\Delta_1\|x_n-x^*\|^2+\gamma M(\delta,\Delta)(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)+\Delta^2. \tag{28}$$

Дополнительно предположим, что

$$\Delta_1\leqslant\frac{q}{8}\,, \tag{29}$$

тогда из (28) получим

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant(1-\gamma q)\,\|x_n-x^*\|^2+\gamma M(\delta,\Delta)(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)+\Delta^2.$$

Отсюда с использованием (26), (27) имеем

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&\leqslant(1-\gamma q)\bigl(l\,\overline{q}^{\,n}+C(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)\bigr)+\gamma M(\delta,\Delta)(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)+\Delta^2\leqslant\\&\leqslant l\,(1-\gamma q)\,\overline{q}^{\,n}+\bigl(C(1-\gamma q)+\gamma M(\delta,\Delta)+\Delta\bigr)(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)\leqslant l\,\overline{q}^{\,n+1}+C(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma).\end{aligned}$$

Таким образом, установлена справедливость первого из соотношений (20). Наряду с этим условие (21) гарантирует принадлежность точки $P_{M_\xi}(x_{n+1})$ области $\Omega_R(x^*)$, поскольку

$$\begin{aligned}\bigl\|P_{M_\xi}(x_n)-x^*\bigr\|&=\|P_Mx_n-x^*+\xi-P_M\xi\|\leqslant\|P_Mx_n-P_Mx^*\|+\|P_Mx^*-x^*+\xi-P_M\xi\|\leqslant\\&\leqslant\bigl(l+C(\delta+\Delta+\Delta_1+\gamma)\bigr)^{1/2}+\Delta\leqslant R\,.\end{aligned}$$

В силу принципа математической индукции установлено, что при выполнении сделанных выше предположений соотношения (19) имеют место для всех номеров $n \geqslant 1$.

Покажем теперь, каким образом следует выбирать величины $\overline{q}$, l, C, $\gamma > 0$ с тем, чтобы при подходящих δ, Δ, Δ_1 выполнялись условия (21), (23) – (27), (29). Неравенство (21) имеет место, если

$$l + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma) \leqslant \frac{R^2}{4}\,, \tag{30}$$

$$\Delta \leqslant \frac{R}{2}\,. \tag{31}$$

Соотношение (30) автоматически выполняется при

$$l \leqslant \frac{R^2}{8}\,, \quad C \leqslant \frac{R^2}{16\gamma}\,, \tag{32}$$

$$\delta + \Delta + \Delta_1 \leqslant \frac{R^2}{16C}\,. \tag{33}$$

Неравенство (24) имеет место, если γ, C подчинены условиям

$$\gamma \leqslant \frac{q}{8(N_1^2\delta + 2N_1^4)}\,, \tag{34}$$

$$C \leqslant \frac{q^2}{64\gamma\left(4N_1N_2 + L\left\|F(x^*)\right\|\right)^2}\,. \tag{35}$$

Для обеспечения (25) потребуем выполнения соотношения

$$l \leqslant \frac{q^2}{16\left(4N_1N_2 + L\left\|F(x^*)\right\|\right)^2}\,. \tag{36}$$

Выберем γ так, что

$$0 < \gamma < \frac{8}{9q}\,, \tag{37}$$

и положим

$$\overline{q} = 1 - \frac{9}{8}\,\gamma q\,. \tag{38}$$

Нетрудно видеть, что при таком выборе γ, $\overline{q}$ соотношение (26) имеет место. Неравенство (27) перепишем в виде

$$(\gamma q)^{-1}\big(\gamma M(\delta, \Delta) + \Delta\big) \leqslant C. \tag{39}$$

Для обеспечения выполнения условий на величину C, налагаемых неравенствами (35), (39) и вторым соотношением в (32), согласуем входящие в них параметры так, что

$$\gamma \leqslant \min\left\{\frac{qR^2}{32M(\delta,\Delta)}\,,\ \frac{q^3}{128M(\delta,\Delta)\left(4N_1N_2 + L\left\|F(x^*)\right\|\right)^2}\right\}, \tag{40}$$

$$\Delta \leqslant \min\left\{\frac{qR^2}{32}\,,\ \frac{q^3}{128\left(4N_1N_2 + L\left\|F(x^*)\right\|\right)^2}\right\}. \tag{41}$$

В соответствии с (35) и вторым условием в (32) выберем

$$C = \min\left\{\frac{R^2}{16\gamma}\,,\ \frac{q^2}{64\gamma\left(4N_1N_2 + L\left\|F(x^*)\right\|\right)}\right\}. \tag{42}$$

Объединяя (36) с первым из условий (32), видим, что величина l может быть выбрана следующим образом:

$$l = \min\left\{\frac{R^2}{8}\,,\ \frac{q^2}{16\left(4N_1N_2 + L\left\|F(x^*)\right\|\right)^2}\right\}. \tag{43}$$

Учитывая соотношения (34), (37), (40), подчиним шаговый множитель $\gamma > 0$ условию

$$\gamma < \min\left\{\frac{8}{9q}\,,\ \frac{q}{8(N_1^2\delta + 2N_1^4)}\,,\ \frac{qR^2}{32M(\delta,\Delta)}\,,\ \frac{q^3}{128M(\delta,\Delta)\Big(4N_1N_2 + L\,\big\|F(x^*)\big\|\Big)^2}\right\}. \tag{44}$$

Отметим, что неравенство (39) при таком выборе γ и C автоматически выполняется. Погрешности δ, Δ, Δ_1 должны быть достаточно малы с тем, чтобы выполнялись условия (23), (29), (31), (33), (41).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполняются условия* A, B, *соотношения* (4), (5), *начальное приближение* x_0 *удовлетворяет условию*

$$\|x_0 - x^*\|^2 \leqslant l + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma),$$

константы $\overline{q}$, l, C, γ *выбраны согласно* (38), (43), (42), (44) *соответственно. Предположим, что погрешности* δ, Δ, Δ_1 *удовлетворяют* (23), (29), (31), (33), (41). *Тогда для определяемой согласно* (6) *последовательности* $\{x_n\}$ *выполняются соотношения*

$$\|x_n - x^*\|^2 \leqslant l\,\overline{q}^{\,n} + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma), \tag{45}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \|x_n - x^*\|^2 \leqslant C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma). \tag{46}$$

Соотношения (45), (46) означают устойчивость итерационного процесса (6) по отношению к вариации начальной точки x_0 в некоторой фиксированной окрестности квазирешения x^*, а также к малым погрешностям в задании исходного оператора $F(x)$. Согласно (46), вырабатываемые процессом (6) приближения $\{x_n\}$ стабилизируются в окрестности x^* с радиусом, пропорциональным погрешностям δ, Δ, Δ_1 и шаговому множителю γ. Отметим, что малость Δ, Δ_1 может быть обеспечена за счет выбора подпространства M и управляющего параметра ξ.

Процесс (6) может быть использован в частном случае аффинного оператора $F(x) = Ax - f$, где A — линейный непрерывный оператор, действующий из H_1 в H_2, и $f \in H_2$. В этом случае задача (2) записывается в виде

$$\min_{x\in Q} \frac{1}{2}\,\|Ax - f\|^2. \tag{47}$$

Нетрудно проверить, что второе и третье неравенства в (4) и условие B при этом выполняются автоматически, а условие A принимает вид $N(A) \cap M = \{0\}$. Согласно доказанной теореме, метод (6) применительно к задаче (47) вырабатывает последовательность $\{x_n\}$, стабилизирующуюся в окрестности квазирешения. В отличие от итерационных методов, рассмотренных в [13], этот метод в случае приближенных данных не требует сопровождения в виде критерия останова.

Автор признателен проф. М. Ю. Кокурину за стимулирующие обсуждения результатов настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
3. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
4. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы для решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // Фундаментальная и прикл. матем. 1997. **3**, № 3. 685–692.
5. *Бакушинский А.Б.* О скорости сходимости итерационных процессов для нелинейных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 1998. **38**, № 4. 559–563.
6. *Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* О невырожденных оценках скорости сходимости итерационных методов решения некорректных нелинейных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 6. 832–837.
7. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* Необходимые условия сходимости итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 7. 986–996.
8. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы градиентного типа для нерегулярных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 1998. **38**, № 12. 1962–1966.
9. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы градиентного типа с проектированием на фиксированное подпространство для решения нерегулярных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 10. 1447–1450.

10. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* Об итеративных методах градиентного типа для решения нелинейных некорректных уравнений // Сибирский журнал вычислительной математики. 2001. № 4. 317–329.
11. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: Едиториал УРСС, 2002.
12. *Козлов А.И.* Об одном классе устойчивых итерационных методов для решения нелинейных некорректных операторных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 87–93 (электронная версия статьи приведена в http://num-meth.srcc.msu.su).
13. *Бакушинский А.Б.* О скорости сходимости алгоритмов итеративной регуляризации для решения линейных задач с выпуклыми ограничениями // ЖВМ и МФ. 2002. **42**, № 7. 933–936.

Поступила в редакцию
21.02.2003