

УДК 517.5

ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВЭЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

С. В. Поршнеv¹

В работе приводятся результаты исследования возможности применения непрерывного вэйвлет-преобразования в задаче определения закона изменения частоты широкополосного частотно-модулированного сигнала.

1. Введение. Задача обработки широкополосного частотно-модулированного (ЧМ) сигнала (точнее, определения закона изменения частоты по известной зависимости мгновенных значений сигнала от времени) возникает при решении ряда задач экспериментальной баллистики радиолокационными методами [1]. Данная задача является частным случаем более широкого класса задач анализа частотно-временных особенностей нестационарных сигналов, в которых требуется определять точные положения особенностей на временной оси и оценивать характер данных особенностей.

Отметим, что универсальных методов решения задачи анализа частотно-временных характеристик сигналов пока не найдено, поэтому их поиск продолжается и в настоящее время. Например, в [2] построены различные алгоритмы обработки широкополосных ЧМ сигналов с монотонно возрастающим законом изменения частоты (метод временных интервалов; метод граничной частоты; метод мгновенного спектра; метод аналитического сигнала) и на основе анализа результатов обработки моделей РС даны оценки их точностных характеристик. Однако за рамками монографии [2] осталась появившаяся в 80-90-е годы XX в. и быстро развивающаяся сегодня теория вэйвлетов [3–5], которые находят широкое применение во многих прикладных областях [6–9].

В то же время, несмотря на определенные успехи, достигнутые в данном направлении, оно еще далеко от окончательного завершения. Это подтверждается, например, отсутствием общепринятой терминологии, структуризации и систематизации вэйвлет-преобразований [10]. Во многом данный факт объясняется тем, что теория вэйвлетов находится на стыке различных наук, а потому словарь используемых терминов отличается от словарей математического и функционального анализов.

Цель настоящей статьи состоит в исследовании возможности использования непрерывного вэйвлет-преобразования для обработки широкополосных ЧМ сигналов. С учетом отмеченных выше обстоятельств, представляется целесообразным предварить рассмотрение основного вопроса кратким изложением теоретических сведений в объеме, достаточном для понимания результатов, полученных во второй части статьи.

2. Вэйвлет-преобразование. Изложение материала данного раздела статьи в основном следует монографии [3].

2.1. Непрерывное вэйвлет-преобразование. Рассмотрим пространство $L^2(R)$ функций, определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ и имеющих конечную энергию

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad (1)$$

и пространство $L^2(0, 2\pi)$ квадратично интегрируемых функций на интервале $[0, 2\pi]$.

Отметим, что функциональные пространства $L^2(0, 2\pi)$ и $L^2(R)$ существенно различны, в частности, функция $w(t) = e^{jt}$, как не удовлетворяющая условию (1), не принадлежит пространству $L^2(R)$. Следовательно, набор синусоидальных волн $w_n(t) = e^{jnt}$ не может быть базисом функционального пространства $L^2(R)$.

Базисные функции (“волны”) пространства должны стремиться к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. Для построения базиса пространства $L^2(R)$ наиболее подходящими оказались солитоноподобные функции-вэйвлеты. По аналогии с подходом, использовавшемся при построении базиса пространства $L^2(0, 2\pi)$, который был

¹ Нижнетагильский государственный педагогический институт, ул. Красногвардейская, 57, 622031, г. Нижний Тагил; e-mail: porshnev@tagnet.ru

полностью сформирован с помощью одной базисной функции $w(t)$, базис пространства $L^2(R)$ также строится с помощью одного вэйвлета $\psi(t)$. При этом спектр данного вэйвлета может иметь одну частоту или набор частот.

Для построения базиса пространства $L^2(R)$ вводят систему сдвигов $\psi(t-k)$, которые для простоты будем считать целыми, и аналог синусоидальной частоты, которую для определенности будем считать кратной степени числа 2: $\psi_{jk}(t) = \psi(2^j t - k)$, где j и k — целые числа ($j, k \in I$). Выполняя масштабные преобразования, можно описать все частоты и покрыть всю временную ось, используя один базисный вэйвлет.

Найдем связь между нормами функций $\psi_{jk}(t)$ и $\psi(t)$. По определению нормы функции находим

$$\|\psi_{jk}(2^j t - k)\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(2^j t - k) \psi(2^j t - k)^* dt \right]^{1/2} = 2^{j/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) \psi(\xi)^* d\xi \right]^{1/2},$$

т.е.

$$\|\psi(2^j t - k)\|_2 = 2^{-j/2} \|\psi(t)\|_2.$$

Следовательно, если вэйвлет $\psi(t) \in L^2(R)$ имеет единичную норму, то все вэйвлеты семейства $\{\psi_{jk}\}$ вида

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in I, \tag{2}$$

также нормированы на единицу, т.е. $\|\psi_{jk}(t)\|_2 = \|\psi(t)\|_2 = 1$. Вэйвлет $\psi(t) \in L^2(R)$ называется ортогональным, если определенное соотношением (2) семейство представляет собой ортонормированный базис функционального пространства $L^2(R)$, т.е.

$$\langle \psi_{jk}(t), \psi_{lm}(t) \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}, \tag{3}$$

и каждая функция $f(t) \in L^2(R)$ может быть представлена в виде ряда

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t). \tag{4}$$

Можно показать, что при соответствующем выборе функций $\psi_{jk}(t)$ ряд будет сходиться равномерно в $L^2(R)$; следовательно,

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{-M_2}^{N_2} \sum_{-M_1}^{N_1} c_{jk} \psi_{jk}(t) \right\| = 0.$$

Отметим, что доказательство многих положений теории вэйвлетов (полноту и ортогональность базиса, сходимости рядов и др.) удалось получить именно для дискретного частотно-временного пространства, образованного целыми сдвигами и растяжениями по степеням двойки [3, 4]. Данные положения имеют особую важность в задачах, в которых необходимо проводить разложение сигнала с использованием минимального числа независимых коэффициентов вэйвлет-преобразования и иметь точную формулу обратного преобразования (например, при сжатии информации или в задачах численного моделирования).

Аналогично описанному выше подходу осуществляется построение базиса пространства $L^2(R)$, состоящего из непрерывных вэйвлетов, при этом значения коэффициента масштабного преобразования и параметра сдвига являются произвольными действительными числами:

$$\psi_{ab} := |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \tag{5}$$

где $a, b \in R, \psi \in L^2(R)$.

Используя (5), непрерывное вэйвлет-преобразование можно записать следующим образом:

$$[W_\psi f](a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ab}^*(t) dt. \tag{6}$$

Проводя аналогию с преобразованием Фурье, коэффициенты $c_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle$ в разложении (4) для функции $f(t)$ в ряд по вэйвлетам определяют через интегральное вэйвлет-преобразование:

$$c_{ik} = [W_\psi f] \left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right). \quad (7)$$

Для обозначения коэффициентов вэйвлет-преобразования в литературе принято использовать более компактные обозначения: $W(a, b)$, $W_\psi f$, или $W[f]$.

Таким образом, любая функция $f(t) \in L^2(R)$ может быть получена суперпозицией масштабных преобразований и сдвигов выбранного базисного вэйвлета $\psi(t)$, т.е. представлена набором “вэйвлетных волн”, амплитуды которых зависят от номера волны (соответственно, от частоты или масштаба) и от параметра сдвига (времени).

Простейшим примером ортогонального вэйвлета является вэйвлет Хаара (Нааг), определяемый соотношениями

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & t < 0, t \geq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Подставив (8) в (3), легко убедиться в том, что любые две функции ψ_{jk}^H, ψ_{lm}^H , полученные из Нааг-вэйвлета с помощью масштабных преобразований $1/2^j, 1/2^l$ и сдвигов $k/2^j, l/2^l$, ортогональны и имеют единичную норму. Отметим, что вэйвлет Хаара хорошо локализован во временной области и плохо в частотной области, т.к. меандр имеет широкий спектр частот.

Известны и другие виды ортогональных вэйвлетов, исторически первым из которых был предложен Добеши [11]. Вэйвлет Добеши, реализуемый итерационными формулами, хорошо локализован и во временной, и в частотной областях. Однако он также не свободен от недостатков, в частности, вэйвлет Добеши оказывается несимметричным.

2.2. Пространственно-временная локализация. Рассмотрим механизм частотно-временной локализации вэйвлет-преобразования. Будем считать, что нетривиальная оконная функция $W(t)$ и функция $tW(t)$ принадлежат $L^2(R)$. Тогда центр $\langle t \rangle$ функции $W(t)$ и ее радиус Δ_W имеют вид

$$\langle t \rangle = \frac{1}{\|W\|_2} \int_{-\infty}^{\infty} t |W(t)|^2 dt, \quad (9)$$

$$\Delta_W = \frac{1}{\|W\|_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |W(t)|^2 dt \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Ширина оконной функции равна $2\Delta_W$. Для средней частоты окна $\langle \omega \rangle$ и его радиуса $\Delta_{\hat{W}}$ в частотной области справедливы следующие представления:

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{\|\hat{W}\|_2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{W}(\omega)|^2 d\omega, \quad (11)$$

$$\Delta_{\hat{W}} = \frac{1}{\|\hat{W}\|_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |\hat{W}(\omega)|^2 d\omega \right]. \quad (12)$$

Пусть $\langle t \rangle, \Delta_\psi, \langle \omega \rangle, \Delta_\psi$ — определенные по формулам (9)–(12) центры и радиусы вэйвлета $\psi(t)$ во временной и частотной областях соответственно. Найдем теперь радиус $\langle t \rangle_{\psi_{ab}}$ временного окна вэйвлет-преобразования, задаваемого базисным вэйвлетом $\psi_{ab}(t) = a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, считая, что вэйвлет нормирован на единицу. Подставив это выражение в (9), получим

$$\langle t \rangle_{\psi_{ab}} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} t \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt.$$

После замены переменных $\xi = \frac{t-b}{a}$ последняя запись принимает вид

$$\langle t \rangle_{\psi_{ab}} = a \cdot \bar{t} + b, \tag{13}$$

где

$$\bar{t} = \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt. \tag{14}$$

Подставив выражение для базисного вэйвлета $\psi_{ab}(t)$ в (10) и повторив замену переменных, получим

$$\Delta_{\psi_{ab}} = a \Delta_{\psi}, \tag{15}$$

где

$$\Delta_{\psi} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t})^2 |\psi(t)|^2 dt. \tag{16}$$

Таким образом, интегральное преобразование

$$c_{\omega\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) W(t - \tau) e^{-j\omega t} dt, \tag{17}$$

где $W(t - \tau)$ — функция окна, τ — переменная, определяющая положение окна на временной оси, ограничено временным окном

$$[\text{win}_{t_{ab}}] = [a \cdot \bar{t} + b - \Delta_{\psi}, a \cdot \bar{t} + b + \Delta_{\psi}]. \tag{18}$$

Будем считать, что энергия спектра основного вэйвлета $\psi(t)$ сосредоточена в области

$$[\text{win}_{\hat{\psi}}] = [\bar{\omega} - \Delta_{\psi}, \bar{\omega} + \Delta_{\psi}], \tag{19}$$

где

$$\bar{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega, \tag{20}$$

$$\Delta_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \tag{21}$$

Для произвольного базисного вэйвлета $\psi_{ab}(t)$, по аналогии с (18), можно записать

$$[\text{win}_{\hat{\psi}_{ab}}] = \left[\langle \omega \rangle_{\hat{\psi}_{ab}} - \Delta_{\hat{\psi}_{ab}}, \langle \omega \rangle_{\hat{\psi}_{ab}} + \Delta_{\hat{\psi}_{ab}} \right],$$

где $\langle \omega \rangle_{\hat{\psi}_{ab}}$, $\Delta_{\hat{\psi}_{ab}}$ вычисляются соответственно по формулам (20), (21) с заменой функции $\hat{\psi}(\omega)$ на функцию $\hat{\psi}_{ab}(\omega)$. Следовательно, для понимания механизма действия вэйлет-преобразования остается получить соотношение между $\bar{\omega}$ и $\langle \omega \rangle_{\hat{\psi}_{ab}}$, Δ_{ψ} и $\Delta_{\hat{\psi}_{ab}}$.

Для этого сначала найдем связь между спектрами $\hat{\psi}(\omega)$ и $\hat{\psi}_{ab}(\omega)$:

$$\hat{\psi}_{ab}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{ab}(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-j\omega t} dt = \sqrt{a} e^{-j\omega b} \hat{\psi}(a\omega). \tag{22}$$

Подставляя (22) в (20) и (21), получим

$$\langle \omega \rangle = a \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\widehat{\psi}(a\omega)| d\omega = \frac{\bar{\omega}}{a}, \quad (23)$$

$$\Delta_{\psi_{ab}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |\widehat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} = \frac{\Delta_{\psi}}{a}. \quad (24)$$

Из (23), (24) очевидно, что спектр базисного вэйвлета $\psi_{ab}(t)$ локализован в области

$$\left[\text{win}_{\widehat{\psi}_{ab}} \right] = \left[\frac{\langle \omega \rangle}{a} - \frac{\Delta_{\psi}}{a}, \frac{\langle \omega \rangle}{a} + \frac{\Delta_{\psi}}{a} \right]. \quad (25)$$

Таким образом, частотная локализация происходит около центра окна, расположенного в точке $\langle \omega \rangle/a$, ширина окна равна $2\Delta_{\psi}/a$, при этом отношение центральной частоты к ширине окна

$$\frac{\langle \omega \rangle}{a} \left(\frac{2\Delta_{\psi}}{a} \right)^{-1} = \frac{\langle \omega \rangle}{2\Delta_{\psi}}$$

не зависит от положения центральной частоты. Частотно-временное окно $[\text{win}_{t_{ab}}] \times [\text{win}_{\widehat{\psi}_{ab}}]$, имеющее площадь $2\Delta_{\psi} \cdot 2\Delta_{\widehat{\psi}}$, сужается при высокой центральной частоте и расширяется при низкой. Иллюстрация частотно-временного преобразования с использованием вэйвлетов в плоскости время-частота представлена на рис. 1. Для сравнения на рис. 2 представлена иллюстрация частотно-временного преобразования при использовании оконного преобразования Фурье.

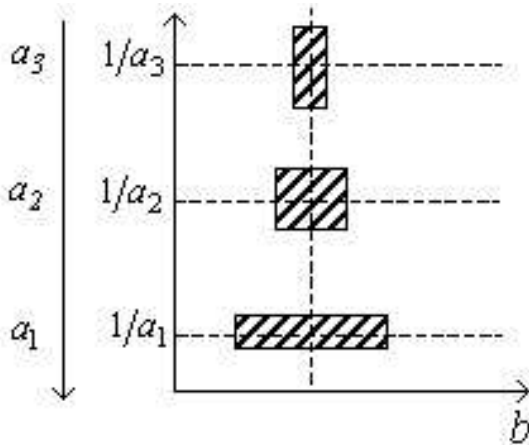


Рис. 1. Частотно-временная локализация с использованием вэйвлетов

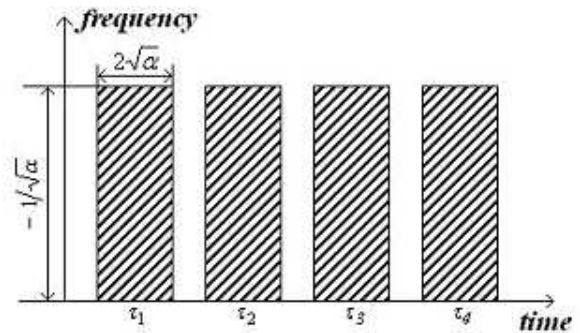


Рис. 2. Частотно-временная локализация с использованием оконного преобразования Фурье [3] с оконной функцией вида $G_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$

Завершая рассмотрение механизма частотно-временной локализации вэйвлет-преобразования, отметим, что проведенные рассуждения оставили без ответа весьма принципиальный вопрос: как связаны свойства вэйвлет-коэффициентов и “мгновенные” частотно-временные характеристики исследуемого сигнала? К рассмотрению данного вопроса, без ответа на который, как очевидно, невозможно построение алгоритма обработки ЧМ сигнала на основе вэйвлет-преобразования, мы вернемся в п. 3.

2.3. Базисные вэйвлет-функции. Необходимо отметить, что в научной литературе на сегодняшний день отсутствует общепринятого определения термина “вэйвлет”. (Одно из наиболее простых определений вэйвлета приведено в [3].) Для практического использования вэйвлет-анализа важнее знать следующие необходимые свойства, при наличии которых функция может быть отнесена к вэйвлетам.

1. Локальность (вэйвлет должен быть локализован во времени и в пространстве).

2. Нулевое среднее: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$. При выполнении условия $\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0$ вэйвлет называется вэйвлетом m -го порядка. Вэйвлеты данного типа позволяют исключить из рассмотрения наиболее регулярные, полиномиальные составляющие сигнала и проводить анализ мелкомасштабных флуктуаций высокого порядка.

3. Ограниченность: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$. Оценка хорошей локализации и ограниченности может быть записана в виде $|\psi(t)| < (1 + |t|^n)^{-1}$ или $|\widehat{\psi}(\omega)| < (1 + |\omega - \omega_0|)^{-1}$, где ω_0 — центральная частота спектра вэйвлета. Здесь число n должно быть возможно бóльшим.

4. Автомоделность базиса: вэйвлеты данного семейства $\psi_{ab}(t)$, будучи полученными посредством масштабных преобразований и сдвигов, имеют такое же число осцилляций, как и базовый вэйвлет $\psi(t)$.

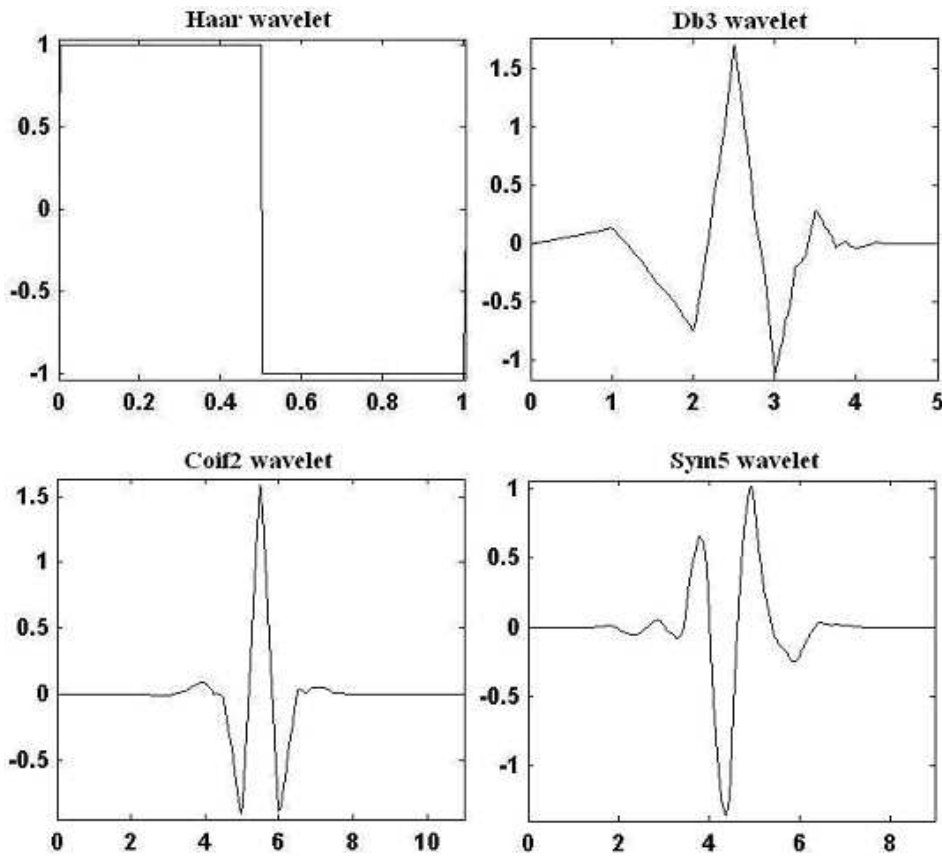


Рис. 3. Примеры базисных вэйвлет-функций

Рассмотрим в качестве примеров некоторые используемые на практике базисные вэйвлеты (рис. 3). Из рис. 3 видно, что каждый вэйвлет имеет характерные особенности во временном и частотном пространствах, поэтому иногда с помощью разных вэйвлетов можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства сигнала. При этом надо также учитывать, что вэйвлет-коэффициенты содержат информацию не только о сигнале, но и о вэйвлете. Если производная вэйвлета также является вэйвлет-функцией, то мы имеем возможность получить вэйвлет более высокого порядка, который имеет больше нулевых моментов, нежели исходный, и позволяет извлечь информацию об особенностях более высокого порядка, содержащихся в сигнале. Отметим, что общепринятых правил и рекомендаций для выбора типа вэйвлета в конкретной задаче в настоящее время не существует.

2.4. Способы представления результатов вэйвлет-преобразования и энергетические характеристики сигнала. Вэйвлет-спектр $W(a, b)$ представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве, способы визуализации которой могут быть различны. Обычно для анализа частотно-временного состава исследуемого сигнала используют:

1) карту проекций изоуровней или изолиний функции $W(a, b)$ на плоскость (a, b) , позволяющих проанализировать изменение интенсивности амплитуд вэйвлет-преобразования на различных частотных масштабах и во времени;

2) карту линий локальных экстремумов данных поверхностей, называемых скелетонами (skeleton), четко выявляющих структуру сигнала;

3) зависимость коэффициентов вэйвлет преобразования для выбранного масштаба преобразования от времени.

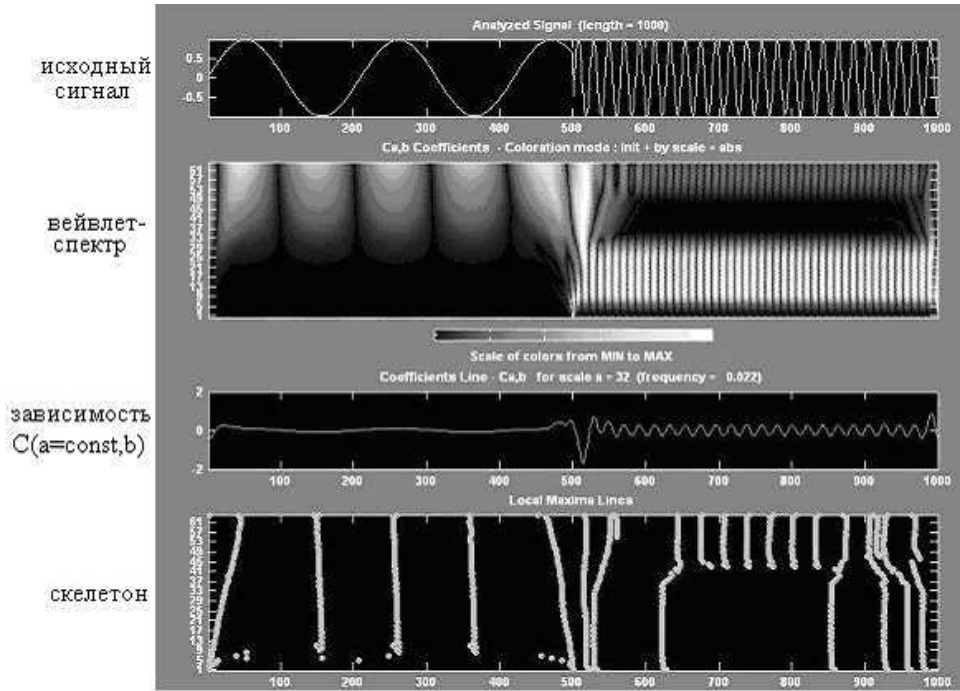


Рис. 4. Примеры представления вэйвлет-спектров модельного сигнала

Примеры исходного сигнала и представления результатов его вэйвлет преобразования представлены на рис. 4. Наличие коэффициентов вэйвлет-преобразования позволяет также исследовать энергетические характеристики сигнала. Анализ энергетических характеристик сигнала основан на теореме, являющейся аналогом теоремы Парсеваля для преобразования Фурье [3]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = C_{\psi}^{-1} \iint W_1(a, b) W_2^*(a, b) \frac{db da}{a^2}. \quad (26)$$

Следствием существования аналога равенства Парсеваля является возможность записать полную энергию сигнала E_f в пространстве действительных функций через амплитуды вэйвлет-преобразования:

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = C_{\psi}^{-1} \iint W^2(a, b) \frac{dad b}{a^2}, \quad (27)$$

где $W_1(a, b)$, $W_2(a, b)$ — коэффициенты вэйвлет-преобразования функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ соответственно.

Из (27) видно, что величину $E_w(a, b) = W^2(a, b)$, характеризующую энергетические уровни исследуемого сигнала $f(t)$ в пространстве (a, b) , можно рассматривать как локальную плотность энергии.

Локальная плотность энергии E в точке $b = t_0$ (“локальный энергетический спектр”), позволяющая проанализировать временную динамику передачи энергии сигнала по масштабам, имеет вид

$$E_{\delta}(a, t_0) = W^2(a, t_0). \quad (28)$$

Величину

$$E_W(a) = \int W^2(a, b) db = \int E_W(a, b) db, \quad (29)$$

описывающую распределение энергии сигнала по масштабам, называют дисперсией вэйвлет-преобразования (wavelet variance) или также скалограммой (scalogram).

Можно показать, выразив дисперсию вэйвлет-преобразования $E_w(a)$ через спектр энергии сигнала в пространстве Фурье $E_F(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$, что дисперсия вэйвлет-преобразования (29) есть сглаженный спектр мощности сигнала E_F :

$$E_W(a) = \int E_F(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega. \tag{30}$$

Так как анализируемая функция имеет конечную энергию, а используемый вэйвлет — нулевое среднее значение, дисперсия вэйвлет-преобразования $E_W(a)$ должна стремиться к нулю на левом и правом концах шкалы масштабов. Следовательно, по теореме Ролля, данная функция на указанном интервале имеет по крайней мере один максимум. Положение данных максимумов дисперсии вэйвлет-преобразования, аналогично максимумам спектра Фурье $E_F(a)$, связывается с частотами и соответствующими характерными составляющими исследуемого сигнала, обеспечивающими основной вклад в его энергию. Отметим, что данный вывод справедлив для периодических сигналов, однако результаты его экспериментальной проверки, проведенной с использованием различных вэйвлетов и различными типами сигналов, показали, что он с достаточной точностью выполняется и для непериодических сигналов [3].

3. Исследование возможности использования непрерывного вэйвлет-преобразования для обработки широкополосного ЧМ сигнала. В работе [2] автором было предложено для оценки работоспособности алгоритмов обработки РС, получаемых в задачах экспериментальной баллистики, и оценки их точностных характеристик использовать математические модели, у которых законы изменения фазы и частоты подобны соответствующим законам реальных радиолокационных сигналов. Используем данный подход, показавший свою эффективность, для оценки применимости вэйвлет-анализа в рассматриваемой задаче.

Зависимость мгновенных значений модели РС от времени, вычисленная в $N = 3000$ точках, закон ЧМ сигнала и его спектр представлены на рис. 5–7 соответственно. Из этих рисунков видно, что рассматриваемый РС является ЧМ сигналом со сложным монотонно возрастающим законом ЧМ, частота которого изменяется в диапазоне 0–130 кГц на временном интервале 0–4.8 мс.

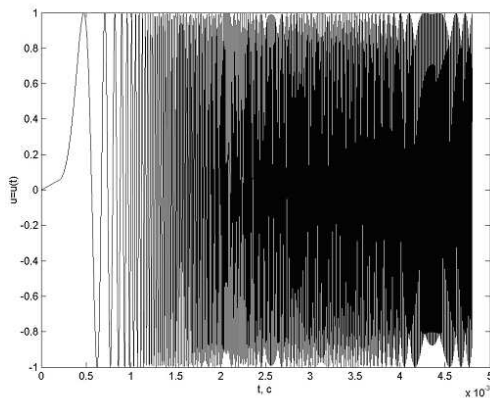


Рис. 5. Зависимость мгновенных значений модели РС от времени

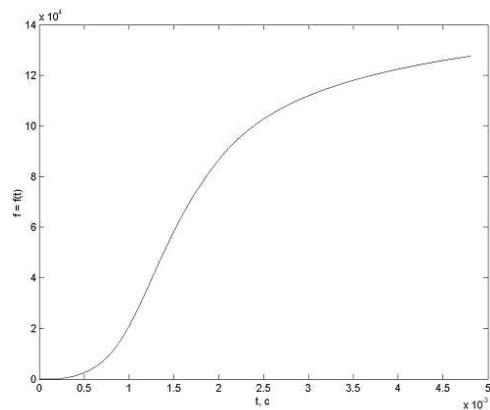


Рис. 6. Закон изменения частоты модели радиолокационного сигнала

Предваряя анализ результатов обработки модели РС, получаемых в задаче измерения ПДС в стволе во время выстрела методом вэйвлет-преобразования, особо отметим принципиальное отличие рассматриваемой задачи от известных примеров использования вэйвлет-анализа [6–9], в которых в абсолютном большинстве случаев вэйвлет-коэффициенты использовались скорее для качественного нежели количественного анализа частотно-временных характеристик сигналов. В рассматриваемой задаче, напротив, необходим не качественный, но количественный анализ, позволяющий с максимально возможной точностью определить закон ЧМ.

Рассмотрим типичные результаты, получаемые при обработке модельного РС методом вэйвлет-преобразования (рис. 8, 9). Здесь в качестве базового вэйвлета был использован вэйвлет Кауфлета пятого порядка, вэйвлет-функция и спектр которого представлены на рис. 10, 11. Коэффициенты непрерывного вэйвлет-преобразования вычислялись с помощью пирамидального алгоритма Малла [13]. Масштабные

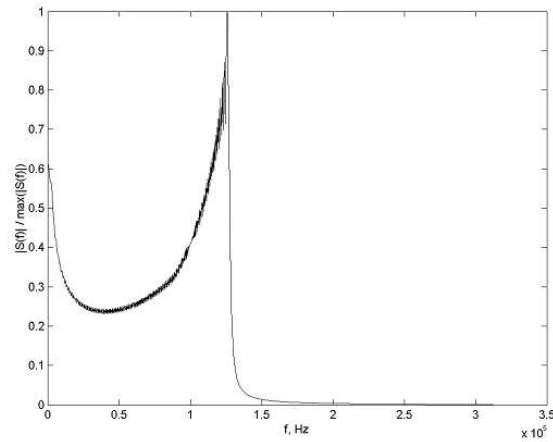


Рис. 7. Нормированный энергетический спектр модели РС

множители вэйвлет-преобразования изменялись в диапазоне $3 - 1025$ с шагом, равным единице, что соответствует диапазону частот $419.7 - 1.435 \cdot 10^5$ Гц. Из вэйвлет-спектра, представленного на рис. 8, хорошо видно, что с течением времени частота исследуемого сигнала увеличивается. Это проявляется в том, что белые полосы, соответствующие экстремумам РС, смещаются в высокочастотную область (область малых значений масштабных коэффициентов).

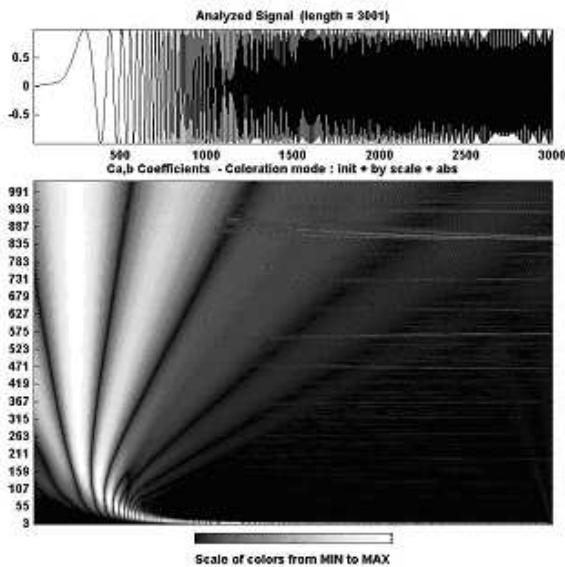


Рис. 8. Вэйвлет-спектр модели РС

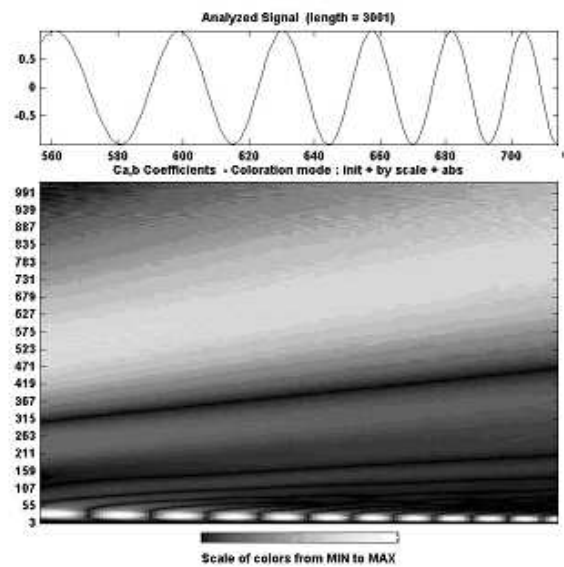


Рис. 9. Фрагмент вэйвлет-спектра модели РС

Как видно из рис. 9, на котором представлен фрагмент вэйвлет-спектра модели РС, в области высоких частот хорошо различимы чередования темных полос, соответствующих точкам перехода сигнала через ноль, и светлых полос, соответствующих экстремумам сигнала. Оценка мгновенной частоты по непрерывному вэйвлет-спектру может быть получена как обратная величина удвоенного временного интервала между двумя последовательными экстремумами. В данном подходе, являющемся по своей сути методом, основанном на измерении периода сигнала, априори предполагается, что частота сигнала на рассматриваемом временном интервале остается постоянной. Это предположение для ЧМ сигналов с произвольным законом изменения частоты, вообще говоря, не справедливо, поэтому возможность использования периодического способа оценки мгновенной частоты для конкретного ЧМ сигнала требует отдельного исследования. Методика такого исследования описана в [2] на примере РС, получаемых в задаче измерения ПДС в стволе артиллерийской системы во время выстрела, там же получены оценки

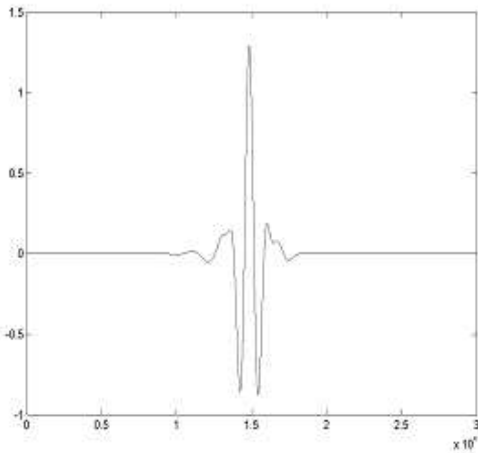


Рис. 10. Вэйвлет-функция базисного вэйвлета Кауфлета 5-го порядка

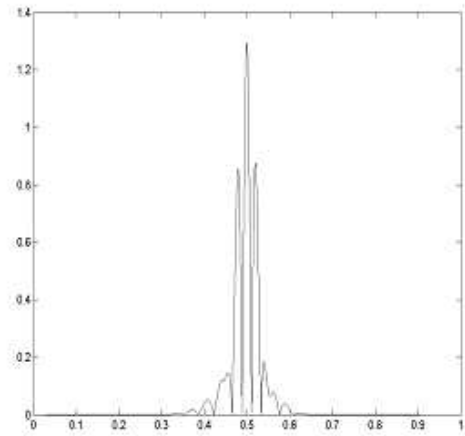


Рис. 11. Спектр базисного вэйвлета Кауфлета 5-го порядка

соответствующих погрешностей и показано, что алгоритм обработки сигнала, базирующийся на периодическом способе измерения частоты, обладает наихудшими точностными характеристиками из всех известных алгоритмов обработки РС. Отметим также, что по вэйвлет-спектру невозможно получить оценку закона изменения частоты до момента достижения сигналом первого максимума (как и при использовании фурье-анализа, в котором для оценки частоты сигнала на данном временном интервале необходимо иметь по крайней мере один период сигнала).

Рассматриваемый РС является ЧМ сигналом со сложным монотонно возрастающим законом изменения частоты, поэтому с течением времени “мгновенная” энергия сигнала будет определяться энергией гармоник, находящихся в высокочастотной области. Наиболее эффективно указанное свойство сигнала можно продемонстрировать, используя оконное преобразование Фурье, называемое в [12] “мгновенным спектром”. Результатом применения оконного преобразования Фурье является набор мгновенных спектров $S(\omega, t_i)$:

$$S(\omega, t_i) = \int_{t_i - \Delta t/2}^{t_i + \Delta t/2} f(t) e^{-j\omega t} dt, \tag{31}$$

где t_i — центр временного окна, Δt — ширина окна. Карта линий уровней мгновенных спектров представлена на рис. 12. Из рис. 12 видно, что эволюция во времени значений частоты, соответствующей максимальному значению мгновенного спектра, происходит в соответствии с законом ЧМ рассматриваемого сигнала. Более подробно алгоритм обработки РС, получаемых в задаче измерения параметров движения снаряда в стволе во время выстрела, основанный на оконном преобразовании Фурье, и оценки его точностных характеристик при использовании различных методов спектрального оценивания представлены в [2].

Проводя аналогию с оконным преобразованием Фурье, естественно предположить, что локальная плотность энергии $E_\delta(a, t_0)$ (28) (“локальный энергетический спектр”), характеризующая временную динамику передачи энергии сигнала по масштабам [4], в момент времени t_0 принимает максимальное значение в точке $a = a_m$, соответствующей значению мгновенной частоты сигнала в момент времени t_0 :

$$f = \frac{F_c}{a_m}, \tag{32}$$

где F_c — частота базисного вэйвлета. Отметим, что для получения значений частоты вэйвлет-преобразования в Гц необходимо умножить безразмерную частоту F_a на частоту дискретизации анализируемого сигнала f_d :

$$F_a = \frac{F_c}{a} f_d. \tag{33}$$

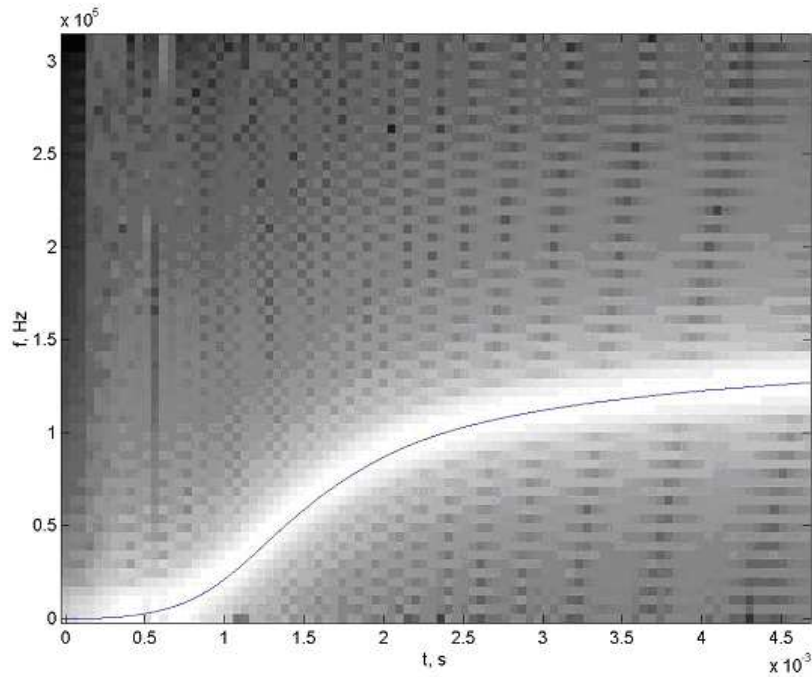


Рис. 12. Карта линий уровня мгновенных спектров модели РС в плоскости “время–частота” (сплошная линия — закон ЧМ модели РС)

Зависимость мгновенной частоты сигнала от времени, определенная как набор частот, которые соответствуют максимумам локальных энергетических спектров $E_{\delta}(a, t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, представлена на рис. 13, 14.

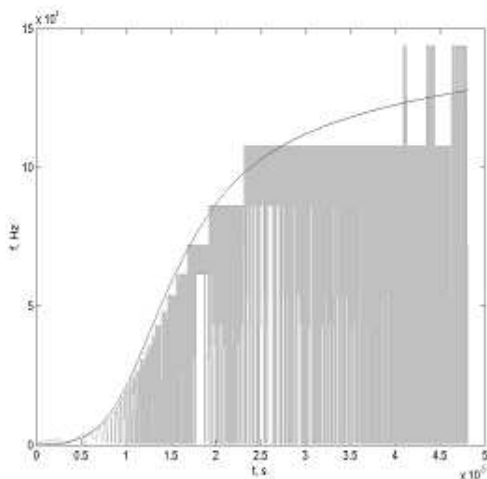


Рис. 13. Результаты обработки модели РС при использовании непрерывного вэйвлет-преобразования (гладкая кривая — закон ЧМ модели РС)

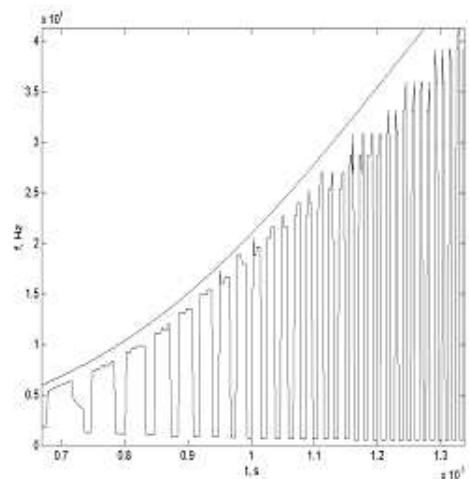


Рис. 14. Результаты обработки модели РС при использовании непрерывного вэйвлет-преобразования (фрагмент)

Полученный результат выглядит достаточно неожиданным: оказывается, что, во-первых, существуют моменты времени, в которые локальные энергетические спектры имеют максимумы на частотах, существенно отличающихся от истинной мгновенной частоты сигнала. Во-вторых, как видно из рис. 14, значения частоты, получаемые при анализе дисперсии коэффициентов вэйвлет-спектра, всегда оказываются

смещенными относительно истинных значений мгновенной частоты сигнала.

Для качественного объяснения полученного результата рассмотрим карту эквипотенциалей дисперсии вэйвлет-коэффициентов $W^2(a, b)$ в плоскости “время–частота” (рис. 15, 16). Сравнение вэйвлет-спектра, представленного на рис. 12, и карты эквипотенциалей функции $W^2(a, b)$ позволяет сделать вывод о том, что последняя более наглядно отображает частотно-временные особенности исследуемого ЧМ сигнала. Как видно из рис. 15, 16, поверхность, задаваемая набором значений $W^2(a, b)$, состоит из ряда пиков, отделенных друг от друга глубокими впадинами. Существование данных впадин является причиной обнаруженных “провалов” на графике зависимости закона изменения частоты сигнала от времени (рис. 14).

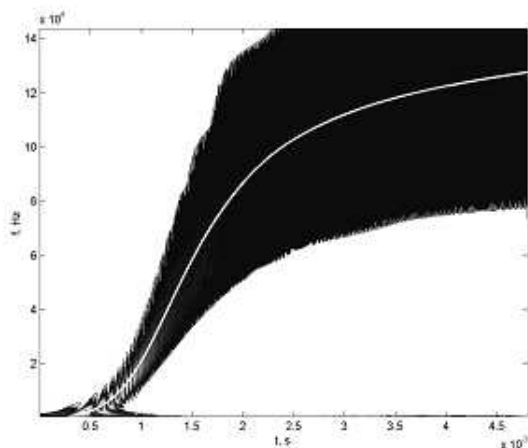


Рис. 15. Карта эквипотенциалей функции $W^2(a, b)$ в плоскости “время–частота” (сплошная линия — истинный закон изменения частоты сигнала)

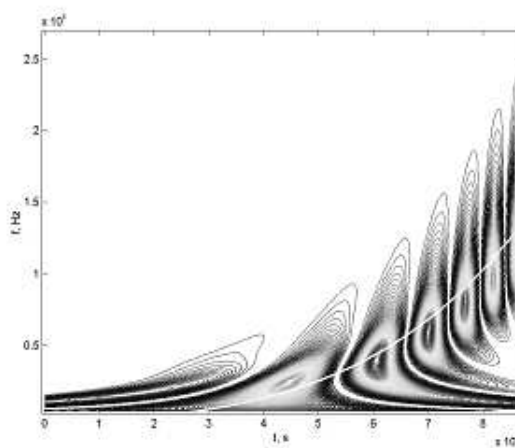


Рис. 16. Карта эквипотенциалей функции $W^2(a, b)$ в плоскости “время–частота” (сплошная линия — истинный закон изменения частоты сигнала)

Сравнение зависимости мгновенных значений исходного сигнала от времени (рис. 15) и карты эквипотенциалей функции $W^2(a, b)$ позволяет сделать вывод о совпадении моментов времени, соответствующих экстремумам исходного сигнала, и координат пиков функции $W^2(a, b)$. Обнаруженное свойство дисперсии вэйвлет-коэффициентов позволяет использовать для нахождения закона изменения частоты следующий алгоритм.

1. Определить моменты времени t_i , соответствующие экстремумам исходного сигнала.
2. Вычислить вэйвлет-коэффициенты $W^2(a, b)$.
3. Для каждого момента времени t_i определить соответствующие значения коэффициентов b_i .
4. Для каждого значения коэффициента b_i найти значения a_i , в которых функция $W^2(a, b)$ достигает максимального значения.
5. Вычислить, используя набор значений a_i , по формуле (33) соответствующие значения частоты F_i .
6. Для нахождения значений мгновенной частоты сигнала в промежуточных точках провести интерполяцию данных таблицы, содержащей значения t_i, F_i .

4. Заключение. В работе получены следующие основные результаты.

1. Проведено исследование возможности использования непрерывного вэйвлет-преобразования для обработки широкополосных ЧМ сигналов (в частности, радиолокационных сигналов), получаемых в задачах экспериментальной баллистики.
2. Показано, что представление результатов вэйвлет-преобразования ЧМ сигнала в виде карты эквипотенциалей дисперсии вэйвлет-коэффициентов $W^2(a, b)$ (локального энергетического спектра) оказывается более информативным, чем вэйвлет-спектр сигнала.
3. Выявлены принципиальные отличия свойств вэйвлет-коэффициентов и мгновенных спектров сигнала, получаемых с помощью оконного преобразования Фурье.
4. Показано, что дисперсия вэйвлет-коэффициентов задает в пространстве поверхность, состоящую из набора пиков, отделенных друг от друга впадинами, при этом координаты максимумов на временной оси совпадают с моментами времени, соответствующими экстремумам сигнала.
5. Построен алгоритм обработки широкополосных ЧМ сигналов, основанный на свойстве локального

энергетического спектра вэйвлет-преобразования.

6. Показана эффективность подхода, основанного на анализе результатов вэйвлет-анализа сигнала с известными частотно-временными, который можно применять при оценке возможности использования вэйвлет-преобразования для исследования частотно-временных характеристик нестационарных сигналов и интерпретации получаемых результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поршнев С.В.* Радиолокационные методы измерений кинематических характеристик снаряда на начальном этапе выстрела // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1999. № 9. 43–78.
2. *Поршнев С.В.* Радиолокационные методы измерений экспериментальной баллистики. Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
3. *Чуи К.* Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.
4. *Добеши И.* Десять лекций по вэйвлетам. М.–Ижевск: РХД, 2001.
5. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.
6. *Астафьева Н.М.* Вэйвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физич. наук. 1996. **166**, № 1. 1145–1170.
7. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* Вэйвлеты и их использование // Успехи физич. наук. 2000. **171**, № 5. 465–501.
8. *Воробьев В.И., Грибунин В.Г.* Теория и практика вэйвлет-преобразований. СПб: ВУС, 1999.
9. Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB. Часть 2. Применение пакетов прикладных программ для решения практических задач: Сборник трудов Всероссийской научной конференции. Москва. 28–29 мая 2002 г. М.: SoftLine, 2002.
10. *Переберин А.В.* О систематизации вэйвлет преобразований // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 2. 133–158.
11. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Comm. Pure and Appl. Math. 1988. **41**. 909–996.
12. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т. 2. М.: Мир, 1983.
13. *Mallat S.* A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Pattern and Machine Intell. 1989. **11**, N 7. 674–693.

Поступила в редакцию
28.01.2003
