УДК 521.13

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ЗАМЕН ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ О ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ЧАСТЬ I

Н. Ю. Сабурова[1]

Рассматривается применение асимптотического метода последовательных канонических замен переменных в задаче о поступательно-вращательном движении двух твердых тел. Разработана процедура построения первого приближения к точному решению системы дифференциальных уравнений, моделирующих рассматриваемую задачу.

1. Введение. Метод построения условно-периодических решений канонических систем дифференциальных уравнений (метод последовательных канонических замен переменных) изложен в работах [4, 5]. Указанный метод применялся для исследования поступательно-вращательного движения твердых тел в рамках спутниковых вариантов задачи двух твердых тел [6, 7]. В силу сложности дифференциальных уравнений, описывающих поступательно-вращательное движение двух твердых тел, исследователи оставляли в уравнениях лишь несколько первых членов разложения силовой функции задачи в тот или иной ряд.

В данной работе используется представление силовой функции в виде бесконечного ряда, для того чтобы можно было в дальнейшем получать решения с любой степенью точности. Кроме того, в упомянутых работах в качестве малого параметра выбиралась величина, характеризующая отличие исследуемых тел от сфер и отношение линейных размеров тел к расстоянию между ними. Однако известно, что размеры тел системы Земля–Луна, системы Плутона и его спутника Харона (был открыт в 1978 г.), некоторых двойных астероидов сравнимы с расстоянием между ними. Для указанных систем такой выбор малого параметра является малоэффективным. В предлагаемой работе разработан новый подход к выбору малого параметра, который позволил исследовать новый класс задач о поступательно-вращательном движении двух твердых тел.

2. Постановка задачи. Рассмотрим классическую задачу о поступательно-вращательном движении двух абсолютно твердых тел M_1 и M_2, элементарные части которых взаимно притягиваются по закону Ньютона. При этом предполагается, что тела имеют произвольную внешнюю форму и внутреннее строение и не имеют общих частей. Пусть O_j — центр инерции тела M_j, m_j — его масса, I_{1j}, I_{2j}, I_{3j} — главные центральные моменты инерции $(j = 1, 2)$.

Введем в рассмотрение систему координат $O_1x_1x_2x_3$ с началом в центре инерции тела M_1, оси сохраняют некоторое неизменное направление в пространстве. Для описания движения тел выберем канонические переменные Делоне–Андуайе L, G, H, l, g, h, L_j, G_j, H_j, l_j, g_j, h_j $(j = 1, 2)$ [2].

Для удобства записи дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения двух твердых тел [3] в системе координат $O_1x_1x_2x_3$ представим в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{00}(\mathbf{p}_0) + H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \tag{2}$$

где

$$H_{00}(\mathbf{p}_0) = \frac{\nu^2\eta^3}{2L^2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{G_j^2}{I_{1j}} + \frac{I_{1j} - I_{3j}}{I_{1j}I_{3j}}\,L_j^2\right],$$

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{I_{2i}} - \frac{1}{I_{1i}}\right)G_i^2\sin^2 J_i\cos^2 l_i + \left(U - f\,\frac{m_1m_2}{r}\right),$$

[1] Архангельский государственный технический университет, строительный факультет, наб. Северной Двины, 17, 163007, г. Архангельск; e-mail: primat@agtu.ru

$$\begin{aligned} &\mathbf{p} \;= (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}^*), && \mathbf{q} \;= (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}^*),\\ &\mathbf{p}_0 = (L, L_1, L_2, G_1, G_2), && \mathbf{q}_0 = (l, l_1, l_2, g_1, g_2),\\ &\mathbf{p}^* = (G, H, H_1, H_2), && \mathbf{q}^* = (g, h, h_1, h_2), \end{aligned}$$

$$\nu = f(m_1 + m_2), \quad \eta = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \cos J_j = \frac{L_j}{G_j} \quad (j = 1, 2),$$

f — гравитационная постоянная, r — расстояние между центрами инерции тел, U — силовая функция взаимодействия двух твердых тел [2]:

$$U = f \int\limits_{(M_1)} \int\limits_{(M_2)} \frac{dm_1 dm_2}{\Delta},$$

Δ — расстояние между элементарными массами dm_1 и dm_2, а интегрирование проводится по всему объему тел M_1 и M_2.

Функции H_{00} и H_1 принято называть “невозмущенной” и “возмущающей” частями гамильтониана F соответственно.

Для получения явного вида возмущающей функции H_1 воспользуемся разложением силовой функции взаимодействия двух твердых тел в ряд Фурье, приведенным в работе [9]:

$$\begin{aligned} U = f m_1 m_2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j} \sum_{k'=0}^{n} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{a^{n+j+1}} \Big[&\Gamma^{CC}_{jmnk'} C^{(1)}_{jm} C^{(2)}_{nk'} + \Gamma^{SS}_{jmnk'} S^{(1)}_{jm} S^{(2)}_{nk'} + \\ &+ \Gamma^{SC}_{jmnk'} S^{(1)}_{jm} C^{(2)}_{nk'} + \Gamma^{CS}_{jmnk'} C^{(1)}_{jm} S^{(2)}_{nk'} \Big], \end{aligned} \tag{3}$$

где r_{0j} — некоторый параметр, связанный с телом M_j $(j = 1,\, 2)$ и имеющий единицы длины; $C^{(j)}_{nk}$, $S^{(j)}_{nk}$ — постоянные Стокса для тела M_j $(j = 1,\, 2;\; n = 0, 1, 2, \ldots;\; k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ [1], для реальных небесных тел постоянные Стокса вычисляются по спутниковым наблюдениям;

$$\begin{aligned} \Gamma^{CC}_{jmnk'} &= 2k_{jmnk'} \operatorname{Re}\left[Z_{jnmk'} + (-1)^m Z_{jn,-mk'}\right],\\ \Gamma^{SS}_{jmnk'} &= 2k_{jmnk'} \operatorname{Re}\left[-Z_{jnmk'} + (-1)^m Z_{jn,-mk'}\right],\\ \Gamma^{SC}_{jmnk'} &= 2k_{jmnk'} \operatorname{Im}\left[Z_{jnmk'} - (-1)^m Z_{jn,-mk'}\right],\\ \Gamma^{CS}_{jmnk'} &= 2k_{jmnk'} \operatorname{Im}\left[Z_{jnmk'} + (-1)^m Z_{jn,-mk'}\right], \end{aligned} \tag{4}$$

здесь Re и Im означают действительную и мнимую части функции;

$$k_{jmnk'} = (-1)^{m+k'} \pi \left[\frac{(j+m)!(n+k')!}{(2j+1)(j-m)!(2n+1)(n-k')!} \right]^{1/2}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} Z_{jnmk'} = &\sum_{p=0}^{n+j} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{m'=-j}^{j} \sum_{m''=-j}^{j} \sum_{k''=-n}^{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_q^{-n-j-1, j+n-2p}(e)\, \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+k'+m'+m+j}}{2^{j+n} p!(j+n-p)!} \times \\ &\times \left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!(2j+1)(2n+1)}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \Delta^{(j+n)}_{j+n-2p, m'+k}(I)\, \Delta^{(j)}_{m'', -m'}(I_1)\, \Delta^{(j)}_{-m, m''}(J_1)\, \Delta^{(n)}_{k'', -k}(I_2)\, \Delta^{(n)}_{-k', k''}(J_2) \times \\ &\times \exp i \left[m'' g_1 - m' h_1 - m l_1 + k'' g_2 - k h_2 - k' l_2 + q l + (j+n-2p) g + \right. \\ &\left. + (m'+k) h + \frac{\pi}{2}(j+n-k'-m) \right], \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(j)}_{m'm}(\vartheta) = &\sum_{æ=\max(0, m-m')}^{\min(j-m', j+m)} (-1)^{æ}\, \frac{[(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{1/2}}{(j-m'-æ)!(j+m-æ)!æ!(æ+m'-m)!} \times \\ &\times \left(\cos\frac{\vartheta}{2} \right)^{2j+m-m'-2æ} \left(\sin\frac{\vartheta}{2} \right)^{2æ+m'-m}, \quad m, m' = -j, -j+1, \ldots, 0, 1, \ldots, j; \end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{gathered}
\cos I = \frac{H}{G}\,, \quad \cos I_s = \frac{H_s}{G_s}\,, \quad \cos J_s = \frac{L_s}{G_s} \quad (s=1,2),\\
a = \frac{L^2}{\eta^2\nu}\,, \qquad e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2}\,;
\end{gathered}
\tag{8}
$$

$X_q^{n,s}(e)$ — коэффициенты Ганзена [2].

Поставим задачу: используя асимптотический метод последовательных канонических замен переменных, построить первое приближение к точному решению системы уравнений (1) с гамильтонианом (2).

3. Выбор малого параметра. Допустим, что в искомом решении переменные I, I_j, J_j ограничены сверху некоторыми значениями $\hat{I}$, $\hat{I}_j$, $\hat{J}_j$ $(j=1,2)$ соответственно.

Введем малый параметр по формуле

$$
\mu = \max\left\{\left|\sin\frac{\hat{J}_j}{2}\right|,\ \left|\sin\frac{\hat{I}_j}{2}\right|\ (j=1,2);\ \left|\sin\frac{\hat{I}}{2}\right|,\ SP,\ D\right\}. \tag{9}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
SP &= \max\left\{\left|S_{nk}^{(i)}\right|,\ \left|C_{nk}^{(i)}\right|,\ k=1,2,3,\ldots,n;\ n=2,3,4,\ldots,\bar{n};\ i=1,2\right\},\\
D\ &= \max\left\{\left|\tilde{U}_n^{(D)}\right|,\ n=3,5,7,\ldots,2\left[\frac{\bar{n}}{2}\right]+1\right\},
\end{aligned}
$$

$\bar{n}$ — некоторое заданное натуральное число, определяющее порядок, до которого будут учитываться гармоники в разложении силовой функции задачи U, квадратные скобки означают целую часть числа,

$$
\tilde{U}_n^{(D)} = \frac{U_n^{(D)}}{(r_{01}+r_{02})^{n-1}},
$$

где $U_n^{(D)}$ — коэффициенты разложения силовой функции в случае Дубошина (случай Дубошина — это случай плоского движения двух осесимметричных тел, оси вращения которых во все время движения остаются перпендикулярными плоскости орбиты) [8]:

$$
U^{(D)} = fm_1m_2 \sum_{\substack{n=1\\ (\text{неч.})}}^{\infty} \frac{U_n^{(D)}}{r^n} = fm_1m_2 \sum_{\substack{j=0\\ (j+n-\text{чет.})}}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{j0}^{(1)}C_{n0}^{(2)}\,\frac{r_{01}^j r_{02}^n}{r^{n+j+1}}\,\frac{(-1)^{n+(n+j)/2}}{2^{n+j}\,n!\,j!}\left[\frac{(n+j)!}{\left(\frac{n+j}{2}\right)!}\right]^2,
$$

откуда нетрудно получить несколько первых коэффициентов:

$$
\begin{aligned}
U_1^{(D)} &= 1,\\
U_3^{(D)} &= -\frac{1}{2}\left(r_{01}^2C_{20}^{(1)} + r_{02}^2C_{20}^{(2)}\right),\\
U_5^{(D)} &= \frac{3}{8}\left(r_{01}^4C_{40}^{(1)} + r_{02}^4C_{40}^{(2)}\right) + \frac{9}{4}\,r_{01}^2r_{02}^2C_{20}^{(1)}C_{20}^{(2)},\\
U_7^{(D)} &= -\frac{5}{16}\left(r_{01}^6C_{60}^{(1)} + r_{02}^6C_{60}^{(2)}\right) - \frac{75}{16}\left(r_{01}^4r_{02}^2C_{40}^{(1)}C_{20}^{(2)} + r_{01}^2r_{02}^4C_{20}^{(1)}C_{40}^{(2)}\right) + \frac{25}{4}\,r_{01}^3r_{02}^3C_{30}^{(1)}C_{30}^{(2)}\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Таким образом, малый параметр характеризует отличие рассматриваемых движений и параметров тел от частного случая кеплеровского движения двух осесимметричных тел в случае Дубошина.

Нетрудно показать, что при выборе малого параметра в виде (9) первое слагаемое в функции H_1

$$
-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{I_{2i}} - \frac{1}{I_{1i}}\right) G_i^2 \sin^2 J_i \cos^2 l_i
$$

имеет третий (или более высокий) порядок малости относительно μ, т.е.

$$
H_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = O(\mu^3) + \left(U - f\,\frac{m_1m_2}{r}\right). \tag{11}
$$

Второе слагаемое в (11) содержит члены любых порядков малости, начиная с первого. Тогда, учитывая разложение (3) – (6), функцию H_1 можно представить в следующем виде:

$$
H_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{||\mathbf{k}||\geqslant 0} \left\{a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{q}_0 + \mathbf{k}^*\mathbf{q}^*) + b_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})\sin(\mathbf{k}_0\mathbf{q}_0 + \mathbf{k}^*\mathbf{q}^*)\right\} + O(\mu^3), \tag{12}
$$

где через $\mathbf{k}$ обозначен вектор с целочисленными компонентами $k_1, k_2, \ldots, k_9$:

$$\begin{array}{lll} k_1 = q, & k_4 = m'', & k_7 = m' + k, \\ k_2 = -m, & k_5 = k'', & k_8 = -m', \\ k_3 = -k', & k_6 = j + n - 2p, & k_9 = -k, \end{array}$$

в котором выделены две векторные составляющие

$$\mathbf{k}_0 = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5), \quad \mathbf{k}^* = (k_6, k_7, k_8, k_9),$$

$||\mathbf{k}||$ — норма вектора $\mathbf{k}$, определяемая формулой $||\mathbf{k}|| = \sum\limits_{\nu=1}^{n} |k_\nu|$; $a_\mathbf{k}(\mathbf{p})$, $b_\mathbf{k}(\mathbf{p})$ — некоторые функции переменных $\mathbf{p}$, явный вид которых может быть найден с использованием разложения (3) – (6).

4. Исключение короткопериодической части гамильтониана. Представим функцию H_1 в следующем виде:

$$H_1 = \bar{H}_1 + H_1^{sp} + RH_1,$$

где функция $\bar{H}_1$ будет содержать вековые и долгопериодические члены первого порядка малости относительно малого параметра μ; функция H_1^{sp} — короткопериодические члены первого порядка; функция RH_1 будет содержать вековые и периодические члены второго и более высоких порядков малости. Таким образом,

$$\bar{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \sum_{||\mathbf{k}_0||=0}{}' \left\{ a_\mathbf{k}(\mathbf{p}) \cos \mathbf{k}^* \mathbf{q}^* + b_\mathbf{k}(\mathbf{p}) \sin \mathbf{k}^* \mathbf{q}^* \right\}; \tag{13}$$

$$H_1^{sp}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{||\mathbf{k}_0||>0}{}' \left\{ a_\mathbf{k}(\mathbf{p}) \cos\left(\mathbf{k}_0 \mathbf{q}_0 + \mathbf{k}^* \mathbf{q}^*\right) + b_\mathbf{k}(\mathbf{p}) \sin\left(\mathbf{k}_0 \mathbf{q}_0 + \mathbf{k}^* \mathbf{q}^*\right) \right\}. \tag{14}$$

Штрих при сумме в выражениях (13) и (14) означает, что в них включены члены первого порядка малости относительно малого параметра μ.

Явный вид функции $\bar{H}_1$ согласно формуле (13) можно получить, если в разложении (12) функции H_1 в ряд Фурье положить все компоненты вектора $\mathbf{k}_0$ равными нулю, т.е. $q = m = k' = m'' = k'' = 0$.

Тогда, учитывая формулы (3) – (6), находим

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = f m_1 m_2 \sum_{j=0}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{a^{n+j+1}} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} \sum_{p=0}^{n+j} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{m'=-j}^{j} X_0^{-n-j-1, j+n-2p}(e) \frac{(-1)^{k+m'+j}}{2^{j+n} p! (j+n-p)!} \times \\ \times \left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \Delta_{j+n-2p, m'+k}^{(j+n)}(I)\, \Delta_{0,-m'}^{(j)}(I_1)\, \Delta_{0,0}^{(j)}(J_1)\, \Delta_{0,-k}^{(n)}(I_2)\, \Delta_{0,0}^{(n)}(J_2) \times \\ \times \cos\Big(-m' h_1 - k h_2 + (j+n-2p) g + (m'+k) h + \frac{\pi}{2}(j+n) \Big), \end{aligned}$$

где переменные a, e, I, I_j, J_j $(j = 1, 2)$ связаны с переменными $\mathbf{p}$ формулами (8). Штрих при сумме $\sum\limits_{j=0}^{\infty}{}'$ означает, что исключаются слагаемые, для которых $j = n = 0$.

Согласно общей идее метода построения условно-периодических решений канонических систем дифференциальных уравнений следует ввести такую каноническую замену переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, чтобы в новых переменных возмущающая часть H_1 гамильтониана H приняла форму

$$H_1 = \bar{H}_1 + RH_2,$$

т.е. чтобы в новых переменных короткопериодическая часть H_1^{sp} обратилась в нуль. Это, вообще говоря, может быть достигнуто канонической заменой переменных

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad \mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_9), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_9),$$

определяемой формулами

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}, \tag{15}$$

где производящая функция $S(\mathbf{P}, \mathbf{q})$ определяется из уравнения

$$\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \mathbf{P}}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) + H_1^{sp}(\mathbf{P}, \mathbf{q}) = 0, \tag{16}$$

$$H_0^{(1)} = H_{00}(\mathbf{P}_0) + \bar{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*), \quad \mathbf{P}_0 = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)\,.$$

Одно из решений уравнения (16) имеет вид

$$S(\mathbf{P}, \mathbf{q}) = \sum_{\|\mathbf{k}_0\|>0}{}' \left\{S'_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*) \sin \mathbf{kq} + S''_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*) \cos \mathbf{kq}\right\},$$

$$S'_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*) = -\frac{a_{\mathbf{k}}(\mathbf{P})}{\left(\mathbf{k}_0, \dfrac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \mathbf{P}_0}\right)}, \quad S''_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*) = \frac{b_{\mathbf{k}}(\mathbf{P})}{\left(\mathbf{k}_0, \dfrac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \mathbf{P}_0}\right)}\,.$$

Через $\dfrac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \mathbf{P}_0}$ обозначен вектор с компонентами $\dfrac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_s}$ $(s = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Уравнения движения (1) в новых переменных $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ снова будут иметь канонический вид

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \tag{17}$$

где

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = H_{00}(\mathbf{P}_0) + \bar{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*) + RH_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad \mathbf{Q}^* = (Q_6, Q_7, Q_8, Q_9), \tag{18}$$

$$H_{00}(\mathbf{P}_0) = \frac{\nu^2 \eta^3}{2P_1^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{P_4^2}{I_{11}} + \frac{I_{11} - I_{31}}{I_{11} I_{31}}\, P_2^2 + \frac{P_5^2}{I_{12}} + \frac{I_{12} - I_{32}}{I_{12} I_{32}}\, P_3^2\right), \tag{19}$$

$$\bar{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*) = f m_1 m_2 \sum_{j=0}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{\bar{a}^{n+j+1}}\, C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} \sum_{p=0}^{n+j} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{m'=-j}^{j} X_0^{-n-j-1, j+n-2p}(\bar{e})\, \frac{(-1)^{k+m'+j}}{2^{j+n} p!(j+n-p)!} \times$$
$$\times \left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!}\right]^{1/2} \times$$
$$\times\, \Delta_{j+n-2p, m'+k}^{(j+n)}(\bar{I})\, \Delta_{0,-m'}^{(j)}(\bar{I}_1)\, \Delta_{0,0}^{(j)}(\bar{J}_1)\, \Delta_{0,-k}^{(n)}(\bar{I}_2)\, \Delta_{0,0}^{(n)}(\bar{J}_2) \times$$
$$\times \cos\Big(-m'Q_8 - kQ_9 + (j+n-2p)Q_6 + (m'+k)Q_7 + \frac{\pi}{2}(j+n)\Big),$$

$$\begin{gathered} \cos \bar{I} = \frac{P_7}{P_6}, \quad \cos \bar{I}_1 = \frac{P_8}{P_4}, \quad \cos \bar{I}_2 = \frac{P_9}{P_5}, \quad \cos \bar{J}_1 = \frac{P_2}{P_4}, \quad \cos \bar{J}_2 = \frac{P_3}{P_5}, \\ \bar{a} = \frac{P_1^2}{\eta^2 \nu}, \qquad \bar{e}^2 = 1 - \frac{P_6^2}{P_1^2}, \end{gathered} \tag{20}$$

$$RH_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = O(\mu^2).$$

Таким образом, в результате замены $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ по формулам (15) система уравнений (1) с гамильтонианом (2) преобразуется в систему уравнений (17) с гамильтонианом (18), в котором с точностью до членов $O(\mu^2)$ отсутствует короткопериодическая часть H_1^{sp}.

5. Необходимые и достаточные условия существования стационарных движений. Пренебрежем в гамильтониане (18) членом $RH_2 = O(\mu^2)$. В результате получим приближенную систему уравнений, соответствующую точной системе уравнений (17):

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathbf{P}}_0 = 0, && \dot{\mathbf{Q}}_0 = -\frac{\partial H_{00}}{\partial \mathbf{P}_0} - \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \mathbf{P}_0}, \\ &\dot{\mathbf{P}}^* = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \mathbf{Q}^*}, && \dot{\mathbf{Q}}^* = -\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \mathbf{P}^*}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} = (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}^*), && \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}^*), \\ &\mathbf{P}_0 = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5), && \mathbf{Q}_0 = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5), \\ &\mathbf{P}^* = (P_6, P_7, P_8, P_9), && \mathbf{Q}^* = (Q_6, Q_7, Q_8, Q_9). \end{aligned}$$

Будем искать стационарные решения осредненной системы уравнений (21). Под стационарными решениями понимаются такие решения, для которых все позиционные переменные $\mathbf{P}$ и медленные угловые переменные $\mathbf{Q}^*$ являются постоянными, а быстрые угловые переменные $\mathbf{Q}_0$ являются линейными функциями времени.

Стационарные решения системы уравнений (21) ищем в виде

$$\left.\begin{aligned} &P_i = P_{i0} = \text{const}, && i = 1, 2, \ldots, 9, \\ &Q_j = Q_{j0} = \text{const}, && j = 6, 7, 8, 9, \\ &Q_s = Q_{s0} + \omega_s t, && s = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Здесь ω_s $(s = 1, 2, 3, 4, 5)$ — некоторые числа, называемые частотами движения.

Необходимые условия существования стационарных решений (22) системы уравнений (21) имеют вид

$$\dot{P}_s = 0 \equiv 0, \tag{23}$$

$$\dot{P}_j = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial Q_j} \equiv 0, \tag{24}$$

$$\dot{Q}_s = -\frac{\partial H_{00}}{\partial P_s} - \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial P_s} \equiv \omega_s, \tag{25}$$

$$\dot{Q}_j = -\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial P_j} \equiv 0, \tag{26}$$

$j = 6, 7, 8, 9$; $s = 1, 2, 3, 4, 5$.

Уравнения (23) удовлетворяются тождественно.

Нетрудно убедиться, что если угловые переменные Q_6, Q_7, Q_8 и Q_9 удовлетворяют условиям

$$Q_7 - Q_8 = \pi z_1, \quad Q_7 - Q_9 = \pi z_2, \quad Q_6 = \frac{\pi}{2} + \pi z_3, \tag{27}$$

где z_1, z_2, z_3 — целые числа, то уравнения (24) будут также удовлетворяться тождественно.

Уравнения (26) с учетом формул (20) можно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{e}} = 0, && \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}} = 0, \\ &\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}_1} = 0, && \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}_2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$\big(\sin\bar I\neq 0,\ \sin\bar I_j\neq 0\ (j=1,2)\big)$, $\bar H_1$ определяется формулой

$$\bar H_1(\mathbf{P},\mathbf{Q}^*)=fm_1m_2\sum_{j=0}^{\infty}{}'\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_{01}^jr_{02}^n}{\bar a^{n+j+1}}C_{j0}^{(1)}C_{n0}^{(2)}\times$$
$$\times\sum_{p=0}^{n+j}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{m'=-j}^{j}X_0^{-n-j-1,j+n-2p}(\bar e)(-1)^{m'z_1+kz_2+(j+n-2p)z_3+j+n-p}\times$$
$$\times\left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\frac{(-1)^{k+m'+j}}{2^{j+n}p!(j+n-p)!}\Delta_{j+n-2p,m'+k}^{(j+n)}(\bar I)\,\Delta_{0,-m'}^{(j)}(\bar I_1)\,\Delta_{0,0}^{(j)}(\bar J_1)\,\Delta_{0,-k}^{(n)}(\bar I_2)\,\Delta_{0,0}^{(n)}(\bar J_2).$$

Исходя из явного вида (7) функций $\Delta_{m,m'}^{(j)}(\vartheta)$, нетрудно убедиться, что при выборе малого параметра по формуле (9) функция $\bar H_1(\mathbf{P},\mathbf{Q}^*)$ с точностью до членов порядка μ имеет вид

$$\bar H_1=fm_1m_2\sum_{\substack{j=0\\(j+n\text{ -- нечет})}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{z_2+z_3+\frac{j+n+1}{2}}\frac{r_{01}^jr_{02}^n}{\bar a^{n+j+1}}C_{j0}^{(1)}C_{n0}^{(2)}\left[\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\right]^{1/2}\sin\bar I_2\,X_0^{-n-j-1,1}(\bar e)A_{jn\frac{j+n-1}{2}10}+$$
$$+fm_1m_2\sum_{\substack{j=1\\(j+n\text{ — нечет})}}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{z_1+z_3+\frac{j+n+1}{2}}\frac{r_{01}^jr_{02}^n}{\bar a^{n+j+1}}C_{j0}^{(1)}C_{n0}^{(2)}\left[\frac{(j+1)!}{(j-1)!}\right]^{1/2}\sin\bar I_1\,X_0^{-n-j-1,1}(\bar e)A_{jn\frac{j+n-1}{2}01}+$$
$$+fm_1m_2\sum_{\substack{j=0\\(j+n\text{ — нечет})}}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{z_3+\frac{j+n+1}{2}}\frac{r_{01}^jr_{02}^n}{\bar a^{n+j+1}}C_{j0}^{(1)}C_{n0}^{(2)}\left[\frac{(j+n+1)!}{(j+n-1)!}\right]^{1/2}\sin\bar I\,X_0^{-n-j-1,1}(\bar e)A_{jn\frac{j+n-1}{2}00}+$$
$$+fm_1m_2\sum_{\substack{j=0\\(j+n\text{ — чет})}}^{\infty}{}'\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{j+n}{2}}\frac{r_{01}^jr_{02}^n}{\bar a^{n+j+1}}C_{j0}^{(1)}C_{n0}^{(2)}X_0^{-n-j-1,0}(\bar e)A_{jn\frac{j+n}{2}00},$$

где

$$A_{jnpkm'}=\left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!}\right]^{1/2}\frac{(-1)^{k+m'+j}}{2^{j+n}p!(j+n-p)!}.$$

Уравнения (28) определяют зависимости между переменными $\bar a$, $\bar I$, $\bar I_1$, $\bar I_2$, $\bar J_1$, $\bar J_2$ (а значит, и между позиционными переменными $\mathbf{P}$) на стационарном решении. Решение системы уравнений (28) зависит от конкретной задачи. Пример решения этой системы будет приведен ниже.

Наконец, рассмотрим группу уравнений (25). Подставляя в эти уравнения найденные значения переменных $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}^*$, получим скорости ω_s изменения переменных Q_s $(s=1,2,3,4,5)$, являющихся быстрыми угловыми переменными отыскиваемого стационарного решения:

$$\omega_s=-\frac{\partial}{\partial P_s}\left(H_{00}+\bar H_1\right)\Big|_{\substack{P_i=P_{i0}\ (i=1,2,\dots,9)\\ Q_j=Q_{j0}\ (j=6,7,8,9)}}.$$

Используя формулы (19) и (20), нетрудно получить следующие выражения для ω_s $(s=1,2,3,4,5)$:

$$\begin{aligned}
\omega_1&=\frac{\sqrt{\nu}}{\bar a\sqrt{\bar a}}-\frac{1}{\eta\nu}\left[2\sqrt{\bar a}\,\frac{\partial\bar H_1}{\partial\bar a}+\frac{1-\bar e^2}{\bar e\sqrt{\bar a}}\,\frac{\partial\bar H_1}{\partial\bar e}\right];\\
\omega_2&=\frac{I_{11}-I_{31}}{I_{11}I_{31}}\bar G_1\cos\bar J_1+\frac{1}{\bar G_1\sin\bar J_1}\,\frac{\partial\bar H_1}{\partial\bar J_1};\\
\omega_3&=\frac{I_{12}-I_{32}}{I_{12}I_{32}}\bar G_2\cos\bar J_2+\frac{1}{\bar G_2\sin\bar J_2}\,\frac{\partial\bar H_1}{\partial\bar J_2};\\
\omega_4&=\frac{\bar G_1}{I_{11}}-\frac{1}{\bar G_1}\left[\operatorname{ctg}\bar I_1\,\frac{\partial\bar H_1}{\partial\bar I_1}+\operatorname{ctg}\bar J_1\,\frac{\partial\bar H_1}{\partial\bar J_1}\right];\\
\omega_5&=\frac{\bar G_2}{I_{12}}-\frac{1}{\bar G_2}\left[\operatorname{ctg}\bar I_2\,\frac{\partial\bar H_1}{\partial\bar I_2}+\operatorname{ctg}\bar J_2\,\frac{\partial\bar H_1}{\partial\bar J_2}\right].
\end{aligned}\qquad(29)$$

Таким образом, найдены стационарные решения

$$\left.\begin{array}{ll} P_i = P_{i0} = \mathrm{const}, & i = 1, 2, \ldots, 9, \\ Q_j = Q_{j0} = \mathrm{const}, & j = 6, 7, 8, 9, \\ Q_s = Q_{s0} + \omega_s t, & s = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}\right\}$$

системы уравнений (21).

Полученное приближенное решение системы уравнений (17), т.е. решение в переменных $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, можно рассматривать как приближенное решение исходной системы уравнений (1) в переменных $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$. Чем меньше величина μ, тем ближе вычисленное решение к точному, поскольку $|\mathbf{P} - \mathbf{p}| \sim S$ и $|\mathbf{Q} - \mathbf{q}| \sim S$, а $S \sim \mu$.

Найденные семейства стационарных решений в задаче о поступательно-вращательном движении двух твердых тел представляют значительный практический и теоретический интерес. Они составляют основу — промежуточные решения (орбиты) — аналитических теорий движения небесных тел. При этом указанные промежуточные решения являются решениями нового типа, учитывающими уже в первом приближении возмущающие члены.

В дальнейшем предполагается использовать найденные семейства стационарных решений в задаче о поступательно-вращательном движении двух твердых тел для построения в их окрестности условно-периодических решений рассматриваемой задачи.

6. Пример стационарного решения. Построим стационарные решения для конкретной системы двух твердых тел. В Солнечной системе случай Дубошина реализуется (приближенно) для спутника Атлас планеты Сатурн и для спутника Сатурна Телесто. Данные о телах Солнечной системы можно найти на информационном сайте отдела небесной механики ГАИШ МГУ [10].

Приведем некоторые параметры системы Сатурн–Атлас. Угловая скорость орбитального движения Атласа равна его угловой скорости вращения и составляет 598,306°/сут. Угловая скорость вращения Сатурна равна 810,794°/сут. Экваториальный радиус Сатурна — 60628 км, полярный — 54364 км. Средний экваториальный радиус Атласа равен 17,9 км, его полярный радиус — 7,5 км. Отклонения экватора спутника от круга составляет 1,2 км (экватор слегка вытянут в направлении Сатурна). Радиус орбиты Атласа — 137700 км.

Масса Сатурна, умноженная на гравитационную постоянную, равна 37931200,0 км^3/с^2; масса Атласа, умноженная на гравитационную постоянную, составляет 0,00072 км^3/с^2. Стоксовы постоянные Сатурна

$$C_{20} = -0{,}016298; \quad C_{30} = 0; \quad C_{40} = 0{,}000915; \quad C_{50} = 0; \quad C_{60} = -0{,}000103. \tag{30}$$

Относительно гравитационного поля Атласа ничего не известно.

В качестве параметров исследуемых тел примем следующие величины: за r_{01} и r_{02} примем экваториальный радиус Сатурна и средний экваториальный радиус Атласа соответственно; за массы тел m_1 и m_2 примем массы Сатурна и Атласа соответственно; за стоксовы постоянные $C_{n0}^{(1)}$ $(n = 2, 3, 4, 5, 6)$ тела M_1 примем стоксовы постоянные Сатурна (30).

Выберем единицы измерения длины, массы и времени таким образом, чтобы fm_1, $r_{01} + r_{02}$ и масса второго тела m_2 были равны единице $(\tilde{f}\tilde{m}_1 = \tilde{r}_{01} + \tilde{r}_{02} = \tilde{m}_2 = 1)$. Переходим к безразмерным величинам

$$\tilde{r}_{01} = 0{,}999705; \quad \tilde{m}_1 = 52682222222; \quad \tilde{r}_{02} = 0{,}000295, \quad \tilde{m}_2 = 1 \tag{31}$$

(тильда означает безразмерную величину).

Согласно изложенной выше теории выражения $\left|\tilde{U}_m^{(D)}\right|$ $(m = 3, 5, 7, \ldots)$, где $\tilde{U}_m^{(D)}$ — безразмерные коэффициенты в разложении силовой функции в случае Дубошина, должны быть малыми величинами. Допустим, что

$$\tilde{U}_3^{(D)} = -0{,}0001; \quad \tilde{U}_5^{(D)} = \tilde{U}_7^{(D)} = \ldots = \tilde{U}_{13}^{(D)} = 0{,}0001. \tag{32}$$

Выражения коэффициентов $U_m^{(D)}$ $(m = 3, 5, 7)$ через стоксовы постоянные имеют вид (10).

Выразим произведения $C_{n0}^{(2)} r_{02}^n$ из выражений (10) и перейдем к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} C_{20}^{(2)}\tilde{r}_{02}^2 &= -2\tilde{U}_3^{(D)} - \tilde{r}_{01}^2 C_{20}^{(1)}, \\ C_{40}^{(2)}\tilde{r}_{02}^4 &= \frac{8}{3}\left[\tilde{U}_5^{(D)} - \frac{9}{4}\tilde{r}_{01}^2\tilde{r}_{02}^2 C_{20}^{(1)} C_{20}^{(2)}\right] - \tilde{r}_{01}^4 C_{40}^{(1)}, \\ C_{60}^{(2)}\tilde{r}_{02}^6 &= -\frac{16}{5}\left[\tilde{U}_7^{(D)} + \frac{75}{16}\left\{\tilde{r}_{01}^4\tilde{r}_{02}^2 C_{40}^{(1)} C_{20}^{(2)} + \tilde{r}_{01}^2\tilde{r}_{02}^4 C_{20}^{(1)} C_{40}^{(2)}\right\} - \frac{25}{4}\tilde{r}_{01}^3\tilde{r}_{02}^3 C_{30}^{(1)} C_{30}^{(2)}\right] - \tilde{r}_{01}^6 C_{60}^{(1)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Подставляя (30), (31) и (32) в (33), находим

$$C_{20}^{(2)}\tilde r_{02}^2 \approx 0{,}016488; \quad C_{40}^{(2)}\tilde r_{02}^4 \approx 0{,}000964; \quad C_{60}^{(2)}\tilde r_{02}^6 \approx -0{,}000208.$$

Выпишем значения произведений $C_{n0}^{(1)}\tilde r_{01}^n$ $(n = 2, 4, 6)$ для первого тела:

$$C_{20}^{(1)}\tilde r_{01}^2 \approx -0{,}016288; \quad C_{40}^{(1)}\tilde r_{01}^4 \approx 0{,}000914; \quad C_{60}^{(1)}\tilde r_{01}^6 \approx -0{,}000103.$$

Так как на стоксовы постоянные $C_{30}^{(2)}$ и $C_{50}^{(2)}$ не накладывается никаких ограничений, они могут принимать любые значения. Положим $C_{30}^{(2)} = C_{50}^{(2)} = 0$. Стоксовы постоянные $C_{n0}^{(i)}$ $(i = 1, 2;\ n \geqslant 7)$ также положим равными нулю. Кроме того, примем за момент инерции I_{3i} тела M_i $(i = 1, 2)$ следующую величину (момент инерции однородного сфероида с полуосью r_{0i} относительно оси симметрии):

$$I_{3i} = \frac{2}{5}\, r_{0i}^2 m_i.$$

Таким образом,

$$\tilde I_{31} = 21060449290; \quad \tilde I_{32} = 3{,}4846 \cdot 10^{-8}.$$

Для осесимметричного тела имеем [1]:

$$C_{20}^{(i)} = \frac{1}{m_i r_{0i}^2}\,(I_{1i} - I_{3i}),$$

откуда находим

$$I_{1i} = m_i r_{0i}^2 C_{20}^{(i)} + I_{3i},$$

и, таким образом,

$$\tilde I_{11} = 20202341280; \quad \tilde I_{12} = 0{,}01649.$$

Нахождение стационарных решений будем проводить в следующем порядке.

1) Выбираем одну из многочисленных комбинаций угловых переменных Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, удовлетворяющих уравнениям (27), например,

$$Q_6 = \frac{\pi}{2}; \quad Q_7 = Q_8 = Q_9 = 0.$$

2) Стационарные значения позиционных переменных $\bar e$, $\bar a$, $\bar I$, $\bar I_1$, $\bar I_2$, $\bar J_1$, $\bar J_2$ нужно выбрать таким образом, чтобы они удовлетворяли системе уравнений (28). Можно показать, что три последние уравнения системы (28) для рассматриваемой задачи удовлетворяются тождественно, а первое уравнение примет вид

$$\sum_{\substack{j=0\\(j+n\text{— чет})}}^{6}{}' \sum_{n=0}^{6} (-1)^{\frac{j+n}{2}} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{\bar a^{n+j+1}}\, C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} A_{jn\frac{n+j}{2}00}\, \frac{dX_0^{-n-j-1,0}(\bar e)}{d\bar e} = 0. \tag{34}$$

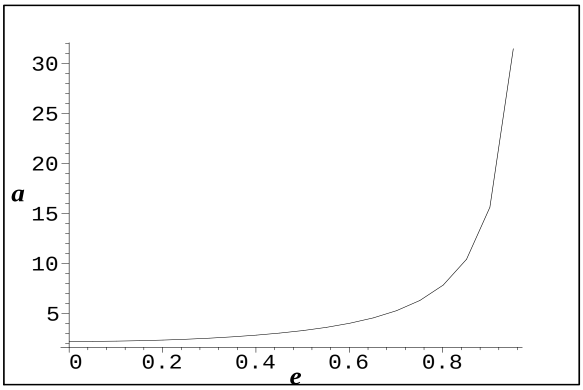
Так как переменные $\bar I$, $\bar I_1$, $\bar I_2$, $\bar J_1$, $\bar J_2$ не входят в это уравнение, то на стационарном решении они могут принимать любые ненулевые (порядка μ) значения, например

$$\bar I = 0{,}0001, \quad \bar I_1 = 0{,}0001, \quad \bar I_2 = 0{,}0001, \quad \bar J_1 = 0{,}0001, \quad \bar J_2 = 0{,}0001.$$

Уравнение (34) решалось численно на ЭВМ. Его решение представлено на рисунке в виде кривой $f(\bar e, \bar a) = 0$. В качестве большой полуоси орбиты на стационарном решении выберем радиус орбиты Атласа $\bar a = 2{,}2705574$ и по выбранному значению $\bar a$ находим соответствующее значение эксцентриситета $\bar e$ по кривой $f(\bar e, \bar a)$: $\bar e = 0{,}122000$.

3) В качестве стационарного значения $\bar G_i$ вектора кинетического момента вращательного движения возьмем величину $\tilde w_i \tilde I_{3i}$ $(i = 1, 2)$, где w_1 и w_2 — угловые скорости вращения Сатурна и Атласа соответственно. Таким образом,

$$\bar G_1 = \tilde w_1 \tilde I_{31} = 48885987{,}78; \quad \bar G_2 = \tilde w_2 \tilde I_{32} = 1{,}33060.$$



Зависимость a от e на стационарном решении

4) В качестве начальных значений Q_{s0} угловых переменных Q_s $(s = 1, 2, 3, 4, 5)$ примем $Q_{s0} = 0$ и вычислим скорости их изменения ω_s по формулам (29):

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\sqrt{\nu}}{\bar{a}\sqrt{\bar{a}}} - \frac{2\sqrt{\bar{a}}}{\eta\nu} \cdot \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{a}} \approx 0{,}2922283183; \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{\tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{31}}{\tilde{I}_{11}\tilde{I}_{31}} \bar{G}_1 \cos \bar{J}_1 \approx 2964869013;$$

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{\tilde{I}_{12} - \tilde{I}_{32}}{\tilde{I}_{12}\tilde{I}_{32}} \bar{G}_2 \cos \bar{J}_2 \approx 38184047{,}06; \quad \tilde{\omega}_4 = \frac{\bar{G}_1}{\tilde{I}_{11}} = -0{,}056970; \quad \tilde{\omega}_5 = \frac{\bar{G}_2}{\tilde{I}_{12}} \approx 80{,}698826.$$

Таким образом, для рассматриваемого случая найдено стационарное решение, определяемое формулами

$$\begin{array}{lll}
\bar{a} = 2{,}2705574; & \bar{e} = 0{,}122000; & \bar{I} = 0{,}0001; \\
\bar{I}_1 = 0{,}0001; & \bar{I}_2 = 0{,}0001; & \bar{G}_1 = 48885987{,}78; \\
\bar{G}_2 = 1{,}33060; & \bar{J}_1 = 0{,}0001; & \bar{J}_2 = 0{,}0001; \\
Q_1 = 0{,}2922283183\,\tau; & Q_2 = 2964869013\,\tau; & Q_3 = 38184047{,}06\,\tau; \\
Q_4 = -0{,}056970\,\tau; & Q_5 = 80{,}698826\,\tau; & Q_6 = \pi/2; \\
Q_7 = 0; & Q_8 = 0; & Q_9 = 0,
\end{array}$$

τ — безразмерное время (за единицу времени принята величина, равная 0,028 сут).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.
2. *Абалкин В.Л., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
3. *Баркин Ю.В.* Уравнения поступательно-вращательного движения небесных тел в оскулирующих элементах // Астрон. журн. 1977. **54**, № 2. 413–424.
4. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971.
5. *Журавлев С.Г.* Метод исследования острорезонансных задач небесной механики и космодинамики. Т. 1. Орбитальное движение. Архангельск: Солти, 2000.
6. *Журавлев С.Г., Зленко А.А.* О стационарных решениях в задаче о поступательно-вращательном движении трехосного спутника трехосной планеты // Астрон. журн. 1983. **60**, № 2. 367–374.
7. *Зленко А.А.* О стационарных решениях в задаче о поступательно-вращательном движении осесимметричного спутника трехосной планеты // Космич. исслед. 1981. **19**, № 5. 688–694.
8. *Сабурова Н.Ю.* Об одном представлении разложения силовой функции взаимного притяжения двух абсолютно твердых тел // Тр. каф. прикл. матем. Вып. 1. Архангельск: Солти, 2001. 23–68.
9. *Sidlichovsky M.* The elimination of the short periodic perturbations in the problem of two finite bodies // Bull. Astron. Inst. Czechosl. 1981. **32**, № 3. 159–167.
9. Информационный сайт отдела небесной механики ГАИШ МГУ (http://lnfm1.sai.msu.ru/neb).

Поступила в редакцию
04.02.2003