

УДК 517.96

**ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ**

**Ю. П. Горьков<sup>1</sup>**

Построено асимптотическое разложение решения первой краевой задачи для модельного уравнения броуновского движения.

Пусть  $u_\varepsilon(x, y)$  — решение следующей задачи:

$$\varepsilon^3 u_{yy} - y u_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad -1 < y < 1; \tag{1}$$

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad u(1, y) = \psi(y), \quad -1 \leq y \leq 1; \tag{2}$$

$$u(x, 1) = 0, \quad u(x, -1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{3}$$

Пусть  $\varphi(y), \psi(-y)$  — бесконечно дифференцируемые функции при  $0 \leq y \leq 1; \varphi(1) = 0, \psi(-1) = 0; \varepsilon$  — положительный малый параметр.

Под решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию, непрерывную при  $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ , имеющую непрерывные при  $0 < x < 1, -1 < y < 1$  производные, входящие в уравнение (1), удовлетворяющую уравнению при этих значениях  $x, y$  и удовлетворяющую условиям (2) и (3).

Существование решения задачи (1)–(3) нетрудно доказать, если воспользоваться методом последовательных приближений и представлениями решений задач (4.60), (4.61) из [1] и (1), (2) из [2]. Можно получить представление решения первой краевой задачи в полосе  $\{x, y: -\infty < x < \infty, -1 \leq y \leq 1\}$ , пользуясь формулой (4.62) из [1]. Для доказательства сходимости производных приближенных решений можно воспользоваться априорными оценками решений, полученными в работе [3].

Цель настоящей работы — построение асимптотического разложения функции  $u_\varepsilon(x, y)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в окрестности отрезка  $0 \leq x \leq 1, y = 0$ .

Ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

$$D = \{x, y: 0 < x < 1, -1 < y < 1\},$$

$$\Gamma = \{x, y: x = 0, 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq 1, y = 1; x = 1, -1 \leq y \leq 0; 0 \leq x \leq 1, y = -1\},$$

$$H = \{x, y: 0 < x < 1, -\infty < y < \infty\},$$

$$l = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad l_\varepsilon = \varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

**1. Построение внешнего разложения.** Асимптотические разложения функции  $u_\varepsilon(x, y)$  в областях  $\{x, y: 0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1\}$  и  $\{x, y: 0 \leq x \leq 1, -1 < y < 0\}$  будем искать в следующем виде (соответственно):

$$u_0^+(x, y) + \varepsilon^3 u_3^+(x, y) + \dots + \varepsilon^{3k} u_{3k}^+(x, y) + \dots, \tag{4}$$

$$u_0^-(x, y) + \varepsilon^3 u_3^-(x, y) + \dots + \varepsilon^{3k} u_{3k}^-(x, y) + \dots. \tag{5}$$

Подставляя ряды (4), (5) в уравнение (1) и в равенства (2), приравнявая коэффициенты в левых и правых частях равенств при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему уравнений для функций  $u_{3k}^\pm (k = 1, 2, 3, \dots)$ :

$$y \frac{\partial}{\partial x} u_0^\pm = 0, \quad y \frac{\partial}{\partial x} u_{3k}^\pm = \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{3k-3}^\pm; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} u_0^+(0, y) = \varphi(y), \quad u_{3k}^+(0, y) = 0, \quad 0 < y < 1; \\ u_0^-(1, y) = \psi(y), \quad u_{3k}^-(1, y) = 0, \quad -1 < y < 0. \end{aligned} \tag{7}$$

<sup>1</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Решения систем (6), (7) находятся явно:

$$u_{3k}^+ = \left[ \frac{1}{y} \frac{d^2}{dy^2} \right]^k \varphi(y) \frac{x^k}{k!}, \quad u_{3k}^- = \left[ \frac{1}{y} \frac{d^2}{dy^2} \right]^k \psi(y) \frac{(1-x)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Другое представление функций  $u_{3k}^\pm$  такое ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\begin{aligned} u_0^+ &= \varphi(y), & u_{3k}^+ &= \frac{F_k^+(y)}{y^{3k-2}} x^k; \\ u_0^- &= \psi(y), & u_{3k}^- &= \frac{F_k^-(y)}{y^{3k-2}} (1-x)^k. \end{aligned} \quad (8')$$

Здесь  $F_k^\pm(y)$  — некоторые бесконечно дифференцируемые функции при  $y \in [0, 1]$  и  $y \in [-1, 0]$  соответственно. Ниже формальные ряды (4), (5) будем обозначать  $U^+(y, \varepsilon)$  и  $U^-(y, \varepsilon)$ , также соответственно. Частные суммы рядов (4), (5) будем обозначать  $A_{3n,y} U^\pm(y, \varepsilon)$ :

$$A_{3n,y} U^\pm(y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{3k} u_{3k}^\pm(x, y).$$

Нетрудно проверить, что

$$l_\varepsilon \left[ A_{3n,y} U^\pm(y, \varepsilon) \right] = \varepsilon^{3n+3} \frac{d^2}{dy^2} u_{3n}^\pm. \quad (9)$$

Из равенств (8'), (9) следует, что при  $y > \varepsilon^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , справедлива оценка

$$l_\varepsilon \left[ A_{3n,y} U^\pm(y, \varepsilon) \right] = O \left( \varepsilon^{3n(1-\alpha)+3+2\alpha} \right). \quad (10)$$

**2. Построение внутреннего разложения.** В окрестности отрезка  $x \in [0, 1]$ ,  $y = 0$  асимптотическое разложение функции  $u_\varepsilon(x, y)$  будем искать в виде ряда

$$V_0(x, \eta) + \varepsilon V_1(x, \eta) + \dots + \varepsilon^k V_k(x, \eta) + \dots, \quad (11)$$

где  $\eta = \frac{y}{\varepsilon}$ . Подставляя ряд (11) в уравнение (1), записанное в переменных  $x, \eta$ , получим систему уравнений для функций  $V_k(x, \eta)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} V_k - \eta \frac{\partial}{\partial x} V_k = 0, \quad (x, \eta) \in H, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Естественно положить

$$V_k(0, \eta) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \eta^k, \quad \eta > 0; \quad V_k(1, \eta) = \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} \eta^k, \quad \eta < 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Существование решения системы (12), (13) вытекает из следующей леммы.

**Лемма 1.** В классе функций, растущих при  $\eta \rightarrow \pm\infty$  не быстрее некоторой степени  $|\eta|$ , существует единственное решение задачи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (x, \eta) \in H; \quad (14)$$

$$w(0, \eta) = c \eta^k, \quad \eta \geq 0; \quad w(1, \eta) = d \eta^k, \quad \eta \leq 0. \quad (15)$$

Функция  $w(x, \eta)$  имеет следующую асимптотику:

$$w(x, \eta) = c \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^j \eta^k \frac{x^j}{j!}, \quad \eta \rightarrow \infty; \quad (16)$$

$$w(x, \eta) = d \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^j \eta^k \frac{(1-x)^j}{j!}, \quad \eta \rightarrow -\infty. \quad (17)$$

Асимптотические разложения (16), (17) допускают дифференцирование по  $x, \eta$  любое число раз.

**Доказательство.** Имеем:

$$l \left\{ c \sum_{j=0}^N \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^j \eta^k \frac{x^j}{j!} \right\} = \frac{d^2}{d\eta^2} c \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^N \eta^k \frac{x^N}{N!}; \tag{18}$$

$$\left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^n \eta^k = \prod_{j=1}^n (k - 3j + 3) (k - 3j + 2) \eta^{k-3n}.$$

Пусть  $\mu(\eta)$  — функция, такая, что  $\mu(\eta) \equiv 0$  при  $\eta \in [-1, 1]$ ,  $\mu(\eta) \equiv 1$  при  $|\eta| \geq 2$  и  $\mu \in C^\infty(-\infty, \infty)$ ; пусть

$$w_N(x, \eta) = \begin{cases} c \sum_{j=0}^N \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^j \eta^k \frac{x^j}{j!} \mu(\eta), & \eta \geq 0; \\ d \sum_{j=0}^N \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^j \eta^k \frac{(1-x)^j}{j!} \mu(\eta), & \eta \leq 0. \end{cases}$$

Из равенства (18) следует оценка

$$l w_N = O(\eta^{k-3N-2}), \quad \eta \rightarrow \infty, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{19}$$

Естественно,

$$l w_N = O(\eta^{k-3N-2}), \quad \eta \rightarrow -\infty, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{20}$$

Учитывая оценки (19), (20), построим функцию  $F_N(x, \eta)$ , удовлетворяющую условиям

$$F_N \in C^\infty(\mathbb{R}_2); \quad F_N \equiv 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq 2, \quad -\infty < \eta < \infty;$$

$$F_N = l w_N \quad \text{при} \quad (x, \eta) \in H; \quad F_N = O(\eta^{k-3N-2}) \quad \text{при} \quad |\eta| \rightarrow \infty.$$

Положим

$$\omega_N = \iint_{\mathbb{R}_2} \Phi(x, \eta, \xi, y) F_N(\xi, y) d\xi dy,$$

где

$$\Phi(x, \eta, \xi, y) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^2} \exp \left\{ -\frac{(\eta-y)^2}{4t} - \frac{3}{t^3} (x - \xi - 0.5(\eta+y)t)^2 \right\} dt,$$

и

$$u_N = \int_0^\infty \gamma \left\{ \varphi(\gamma) [1 - \mu(\gamma)] + \omega_N(0, \gamma) \right\} G(x, \eta, 0, \gamma) d\gamma - \int_{-\infty}^0 \gamma \left\{ \psi(\gamma) [1 - \mu(\gamma)] + \omega_N(1, \gamma) \right\} G(x, \eta, 1, \gamma) d\gamma,$$

где  $G(x, \eta, \xi, y)$  — функция Грина [2] задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} G - \eta \frac{\partial}{\partial x} G = \delta(x-\xi) \delta(\eta-y), \quad (x, \eta) \in H, \quad (\xi, y) \in H;$$

$$G(0, \eta, \xi, y) = 0, \quad \eta \geq 0; \quad G(1, \eta, \xi, y) = 0, \quad \eta \leq 0.$$

Функция  $w = w_N - \omega_N + u_N$  удовлетворяет уравнению (14) и условиям (15). При этом  $w \in C^\infty[H]$  и  $w \in C[\bar{H}]$ .

Докажем единственность решения задачи (14), (15). Пусть существуют два решения  $w_1(x, \eta)$  и  $w_2(x, \eta)$ . Тогда их разность  $w^*(x, \eta)$  удовлетворяет однородному уравнению и принимает нулевые граничные значения. Пусть  $|w^*| \leq M(1 + \eta^{2m})$  при  $(x, \eta) \in \bar{H}$ . Фиксируем положительное число  $n$ . Пусть  $N$  и  $C$  — постоянные, при которых выполняются условия

$$l \left[ \varepsilon \eta^{2m+2}(x+1) + \frac{C(x+1)}{\eta^n} \right] \leq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \eta > N;$$

$$\varepsilon N^{2m+2}(x+1) + \frac{C(x+1)}{N^n} \pm w^*(x, N) \geq 0, \quad \varepsilon \eta^{2m+2} + \frac{C}{\eta^n} \geq 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

В силу принципа максимума, примененного к функции

$$\varepsilon \eta^{2m+2}(x+1) + \frac{C(x+1)}{\eta^n} \pm w^*,$$

получим оценку

$$|w^*| \leq \varepsilon \eta^{2m+2}(x+1) + \frac{C(x+1)}{\eta^n}, \quad \eta \geq N, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (21)$$

Из оценки (21) вытекает, что  $w^*(x, \eta)$  стремится к нулю при  $\eta \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Аналогично доказывается, что  $w^*(x, \eta)$  стремится к нулю при  $\eta \rightarrow -\infty$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Применяя к функции  $w^*$  явное представление решения задачи, получим, что  $w^* \equiv 0$ .

Справедливость утверждения о возможности дифференцирования рядов (16), (17) вытекает из следующего замечания.

Пусть  $w(x, \eta)$  — достаточно гладкая функция в области  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\eta \geq \eta_0 > 0$ , удовлетворяющая уравнению (14) и условию  $w(0, \eta) = O(\eta^{-m})$  при  $\eta \rightarrow \infty$  и  $m > 0$ . Тогда  $w(x, \eta) = O(\eta^{-m})$  при  $\eta \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству единственности решения задачи (14), (15).

Из леммы 1 следует существование и единственность решения системы уравнений (12), (13). Функции  $V_k(x, \eta)$  имеют на бесконечности асимптотику (16), (17) с заменой  $c$  на  $\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$  и  $d$  на  $\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}$ .

В дальнейшем формальный ряд (11) будем обозначать  $V(\eta, \varepsilon)$ . Применительно к  $V(\eta, \varepsilon)$  выражение  $A_{n,\eta}V(\eta, \varepsilon)$  означает частную сумму ряда  $\sum_{k=0}^n \varepsilon^k V_k(x, \eta)$ . Очевидно, что

$$l_\varepsilon [A_{n,\eta}V(\eta, \varepsilon)] = \left( \varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) A_{n,\eta}V(\eta, \varepsilon) = \left( \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \varepsilon \eta \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{k=0}^n \varepsilon^k V_k(x, \eta) \equiv 0.$$

Докажем теперь несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 2.** Пусть  $u \in C[\bar{D}]$ ,  $u_{yy} \in C[D]$ ,  $u_x \in C[D]$  и пусть  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^3 u_{yy} - y u_x = f(x, y).$$

Тогда справедлива оценка

$$|u(x, y)| \leq M \left\{ \max_{\Gamma} |u(x, y)| + \frac{1}{2\varepsilon^3} \sup_D |f(x, y)| \right\}, \quad (22)$$

где  $M$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Положим  $u = (2 - y^2)z$ . Имеем:

$$\varepsilon^3 [(2 - y^2)z_{yy} - 2yz_y - 2z] - y(2 - y^2)z_x = f, \quad z|_{\Gamma} = \frac{u}{2 - y^2}|_{\Gamma}.$$

Из принципа максимума для функции  $z$  следует, что

$$|z| \leq \max_{\Gamma} |z| + \frac{1}{2\varepsilon^3} \sup_D |f(x, y)|. \quad (23)$$

Из оценки (23) вытекает оценка (22).

**Лемма 3.** Решение  $u_\varepsilon(x, y)$  задачи (1)–(3) разлагается при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в асимптотический ряд

$$u_\varepsilon(x, y) = \varphi(y) + \varepsilon x \frac{1}{y} \frac{d^2}{dy^2} \varphi(y) + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2!} \left[ \frac{1}{y} \frac{d^2}{dy^2} \right]^2 \varphi(y) + \dots, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < y < 1. \quad (24)$$

**Доказательство.** Предварительно докажем существование решения следующей задачи:

$$\varepsilon^3 V_{yy} - yV_x = 0, \quad (x, y) \in P; \quad (25)$$

$$V(0, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} V(x, y) = \psi(y), \quad -1 \leq y \leq 0; \quad (26)$$

$$V(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x < \infty; \quad V(x, -1) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (27)$$

где  $P = \{(x, y): [0 < x < \infty, -1 < y < 1] \setminus [x = 1, -1 \leq y \leq 0]\}$ .

Пусть  $\gamma(y) = u_\varepsilon(1, y)$  при  $0 \leq y \leq 1$ . Обозначим через  $V_N(x, y)$  функцию, удовлетворяющую в области  $\{1 < x < N; -1 < y < 1\}$  уравнению (25) и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} V_N(1, y) &= \gamma(y), & 0 \leq y \leq 1; & & V_N(N, y) &= 0, & -1 \leq y \leq 0; \\ V_N(x, 1) &= 0, & 1 \leq x \leq N; & & V_N(x, -1) &= 0, & 1 \leq x \leq N. \end{aligned}$$

Очевидно, функция  $V_N(x, y)$  является гладким продолжением функции  $u_\varepsilon(x, y)$  в область  $1 < x < N, -1 < y < 1$  через отрезок  $x = 0, y \in [0, 1]$ .

В силу принципа максимума имеем

$$|V_N(x, y)| \leq \max_{0 \leq y \leq 1} |\gamma(y)| \leq \max \left\{ \max_{0 \leq y \leq 1} |\varphi(y)|, \max_{-1 \leq y \leq 0} |\psi(y)| \right\}. \tag{28}$$

Вследствие внутренних априорных оценок для решения рассматриваемой задачи [3] и в силу граничных априорных оценок для параболического уравнения [4], функция  $V_N(x, y)$  стремится при  $N \rightarrow \infty$  к некоторой функции  $V(x, y)$ . Согласно лемме 3 из [2], последняя является непрерывной в точке  $(1, 0)$ . Следовательно,  $V(x, y)$  есть гладкое продолжение функции  $u_\varepsilon(x, y)$  в область  $1 < x < \infty, -1 < y < 1$ . Из оценки (28) следует оценка для функции  $V(x, y)$  — решения задачи (25)–(27):

$$|V(x, y)| \leq \max \left\{ \max_{0 \leq y \leq 1} |\varphi(y)|, \max_{-1 \leq y \leq 0} |\psi(y)| \right\}. \tag{29}$$

В уравнении (25) перейдем к новой переменной  $\xi = \varepsilon^3 x$ . Уравнение примет вид

$$V_{yy}^* - y V_\xi^* = 0. \tag{30}$$

Зависимость функции  $V^*(\xi, y)$  от параметра  $\varepsilon$  сохранится в силу граничного условия  $V^*(\varepsilon, y) = \psi(y)$ . Пусть  $\varphi_1(y) = \varphi(y)$  при  $0 \leq y \leq 1$  и  $\varphi_1(y) = 0$  при  $y > 1$ . Функция

$$\omega(\xi, y) = \int_0^\infty \gamma \varphi_1(\gamma) G(\xi, y, \gamma) d\gamma, \quad \xi > 0, \quad -\infty < y < \infty,$$

где

$$\begin{aligned} G(\xi, y, \gamma) &= -\frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^{3/2}}{\tau^3 + 1} \Phi(0, -\tau\gamma, \xi, y) d\tau + \Phi(0, \gamma, \xi, y), \\ \Phi(0, \gamma, \xi, y) &= -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^2} \exp \left\{ -\frac{(\gamma - y)^2}{4t} - \frac{3}{t^3} (-\xi - 0.5(\gamma + y)t)^2 \right\} dt, \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению (30) при  $\xi > 0, -\infty < y < \infty$  и условию  $\omega(0, y) = \varphi_1(y)$  при  $y \geq 0$  (см. [2]).

Функцию  $Z(\xi, y) = V^*(\xi, y) - \omega(\xi, y)$  можно рассматривать как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} Z_{yy} - yZ_\xi &= 0, & -1 < \xi < \infty, & & 0 < y < 1; \\ Z(-1, y) &= 0, & 0 \leq y \leq 1; \\ Z(\xi, 1) &= V^*(\xi, 1) - \omega(\xi, 1) & \text{при } \xi > 0, & & Z(\xi, 1) = 0 & \text{при } -1 \leq \xi \leq 0; \\ Z(\xi, 0) &= 0 & \text{при } -1 \leq \xi \leq 0, & & Z(\xi, 0) = V^*(\xi, 0) - \omega(\xi, 0) & \text{при } \xi > 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $|\omega(\xi, y)| \leq \max_{0 \leq y < \infty} |\varphi_1(y)|$ , то, в силу принципа максимума, примененного к функции  $Z(\xi, y)$ , справедлива оценка  $|Z(\xi, y)| \leq M$ , где  $M$  — некоторая постоянная, зависящая от величин  $\max_{0 \leq y \leq 1} |\varphi(y)|$  и  $\max_{-1 \leq y \leq 0} |\psi(y)|$ . Следовательно, в области  $0 \leq \xi \leq \delta, \delta \leq y \leq 1 - \delta, \delta > 0$  справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} Z \right| \leq M_1, \tag{31}$$

где  $M_1$  — некоторая постоянная, зависящая от предыдущей постоянной  $M$  и натурального числа  $n$ . Из оценки (31) следует асимптотическое разложение (24).

**3. Построение составного разложения<sup>2</sup>.** Применяя оператор  $A_{m,\eta}$  к функции  $A_{3n,y}U^+$ , получим

$$\begin{aligned} A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ &= A_{m,\eta} \sum_{k=0}^n \varepsilon^{3k} \left[ \frac{1}{y} \frac{d^2}{dy^2} \right]^k \varphi(y) \frac{x^k}{k!} = A_{m,\eta} \sum_{k=0}^n \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^k \varphi(\varepsilon\eta) \frac{x^k}{k!} = \\ &= A_{m,\eta} \sum_{k=0}^n \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^k \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(0) (\varepsilon\eta)^j \frac{1}{j!} \frac{x^k}{k!} = \sum_{j=0}^m \varepsilon^j \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \sum_{k=0}^n \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^k \eta^j \frac{x^k}{k!}. \end{aligned} \quad (32)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} A_{3n,y}A_{m,\eta}V &= A_{3n,y} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k V_k(x, \eta) = A_{3n,y} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^j \eta^k \frac{x^j}{j!} = \\ &= A_{3n,y} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon^3}{y} \frac{d^2}{dy^2} \right]^j \frac{y^k}{\varepsilon^k} \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^n \varepsilon^{3j} \left[ \frac{1}{y} \frac{d^2}{dy^2} \right]^j \frac{x^j}{j!} \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} y^k. \end{aligned} \quad (33)$$

Из представлений (32), (33) видно, что если в функции  $A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+$  перейти к переменной  $y = \varepsilon\eta$ , то получим функцию  $A_{3n,y}A_{m,\eta}V$ . Следовательно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ &= A_{3n,y}A_{m,\eta}V \quad \text{при} \quad \varepsilon\eta = y, \quad y > 0; \\ A_{m,\eta}A_{3n,y}U^- &= A_{3n,y}A_{m,\eta}V \quad \text{при} \quad \varepsilon\eta = y, \quad y < 0. \end{aligned}$$

Оценим разность функций  $A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+$  и  $A_{3n,y}U^+$  при условии, что в первой из них  $\varepsilon\eta = y$ . Имеем:

$$\begin{aligned} &\left| A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ - A_{3n,y}U^+ \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^m \varphi^{(j)}(0) \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^n \varepsilon^{3k} \left[ \frac{1}{y} \frac{d^2}{dy^2} \right]^k y^j \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \varepsilon^{3k} \left[ \frac{1}{y} \frac{d^2}{dy^2} \right]^k \frac{x^k}{k!} \left\{ \sum_{j=0}^m \varphi^{(j)}(0) \frac{y^j}{j!} + R_m(y) \right\} \right| \leq \\ &\leq My^{m+1} (1 + \varepsilon^{3n} y^{-3n}). \end{aligned} \quad (34)$$

В этих неравенствах  $R_m(y)$  — остаточный член в разложении Тейлора функции  $\varphi(y)$ , а  $M$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $\varepsilon$ . При том же условии на  $y$  и  $\eta$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} &\left| A_{3n,y}A_{m,\eta}V - A_{m,\eta}V \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^n \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \right]^j \frac{x^j}{j!} \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (\varepsilon\eta)^k - \sum_{k=0}^m \varepsilon^k V_k(x, \eta) \right| \leq M_1 \eta^{-3n-3} \{1 + (\varepsilon\eta)^m\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Справедливы также следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ - A_{3n,y}U^+ \right\} \right| \leq M_2 |y|^{m+2} (1 + \varepsilon^{3n} y^{-3n}); \\ &\left| y \frac{\partial}{\partial x} \left\{ A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ - A_{3n,y}U^+ \right\} \right| \leq M_3 |y|^{m+2} (1 + \varepsilon^{3n} y^{-3n}); \\ &\left| \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left\{ A_{3n,y}A_{m,\eta}V - A_{m,\eta}V \right\} \right| \leq M_4 |\eta|^{-3n-5} (1 + \varepsilon^m \eta^m); \\ &\left| \eta \frac{\partial}{\partial x} \left\{ A_{3n,y}A_{m,\eta}V - A_{m,\eta}V \right\} \right| \leq M_5 |\eta|^{-3n-2} (1 + \varepsilon^m \eta^m). \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогичные оценки верны для разности  $A_{m,\eta}A_{3n,y}U^- - A_{3n,y}U^-$  и ее производных.

Определим функцию

$$u_N(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} A_{3N,y}U^+ + A_{3N,\eta}V - A_{3N,\eta}A_{3N,y}U^+, & y > 0; \\ A_{3N,y}U^- + A_{3N,\eta}V - A_{3N,\eta}A_{3N,y}U^-, & y < 0. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Метод построения составного разложения решений сингулярных задач разработан в монографии [5].

Из оценок (34)–(36) следует, что функция  $u_N(x, y, \varepsilon)$  является непрерывной в окрестности отрезка  $x \in [0, 1], y = 0$ . Непрерывной также является функция  $l_\varepsilon u_N$ .

**Теорема.** Пусть  $\alpha, \beta$  — числа, такие, что  $0 < \beta < \alpha < 1$ . Ряды (4), (5) являются равномерным асимптотическим разложением функции  $u_\varepsilon(x, y)$  в областях  $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, \varepsilon^\alpha \leq y \leq 1/2\}$  и  $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, -1/2 \leq y \leq -\varepsilon^\alpha\}$  соответственно. Ряд (11) является равномерным асимптотическим разложением функции  $u_\varepsilon(x, y)$  в области  $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, -\varepsilon^\beta \leq y \leq \varepsilon^\beta\}$ .

**Доказательство.** Согласно оценкам (10) и (36), имеем:

$$\begin{aligned}
 |u_\varepsilon(q, y) - u_N(q, y, \varepsilon)| &\leq M \{ \varepsilon^{(3N+3)(1-\alpha)} + \varepsilon^{3N+3(1-\alpha)} \}, \quad q = 0, 1, \quad \varepsilon^\alpha \leq |y| \leq \frac{1}{2}; \\
 |u_\varepsilon(q, y) - u_N(q, y, \varepsilon)| &\leq M \{ \varepsilon^{(3N+1)\beta} + \varepsilon^{3N+\beta} \}, \quad q = 0, 1, \quad |y| \leq \varepsilon^\beta; \\
 |l_\varepsilon u_N| &\leq M \{ \varepsilon^{3N(1-\alpha)+3+2\alpha} + \varepsilon^{3N(1-\alpha)+5(1-\alpha)-2} + \varepsilon^{3N+5(1-\alpha)} \}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varepsilon^\alpha \leq |y| \leq \frac{1}{2}; \\
 |l u_N| &\leq M \{ \varepsilon^{(3N+2)\beta} + \varepsilon^{3N+2\beta} \}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad |y| \leq \varepsilon^\beta.
 \end{aligned}$$

Из этих оценок и леммы 1 следует справедливость утверждений теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paganì C. On the parabolic equation  $\operatorname{sgn}(x)|x|^p u_y - u_{xx} = 0$  and a related one // Annali di matematica pura ed applicata. 1974. **IV**, N IC. 333–399.
2. Горьков Ю.П. Решение первой краевой задачи для уравнения броуновского движения // Численный анализ: методы и алгоритмы. М.: Изд-во МГУ, 1998. 115–123.
3. Шатыро Я.И. Внутренние оценки для решений одного класса ультрапараболических уравнений // Матем. записки Уральского университета. 1970. **7**, № 4. 131–154.
4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
5. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию  
12.11.2002